

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

الجزء الأول

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي
الشعب:

- رياضيات
- تقني رياضي
- علوم تجريبية

إشراف و تأليف

محمد فاتح مراد.....مفتش التربية و التكوين

المؤلفون:

- | | |
|--------------------|------------------------|
| لـ تاوريرت جمال | مفتش التربية و التكوين |
| لـ محمد قورين | مفتش التربية و التكوين |
| لـ عبد الحفيظ فلاح | أستاذ التعليم الثانوي |
| لـ عبد المؤمن موس | أستاذ التعليم الثانوي |
| لـ غريسي بلجيلالي | أستاذ التعليم الثانوي |

بسم الله الرحمن الرحيم

مدخل

أعد هذا الكتاب استجابة لمتطلبات المنهاج الجديد الخاص بالسنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي الخاص بشعب الرياضيات ، التقني الرياضي والعلوم التجريبية الذي شرع في تطبيقه ابتداء من الدخول المدرسي 2007 – 2008 .

بالإضافة إلى الاحترام التام للمنهاج فقد حاولنا العمل بمختلف التوجيهات الواردة فيه كما حرصنا على تجسيد المقاربة بالكفاءات التي بني عليها من خلال اختيار أنشطة مناسبة سواء عند مقاربة مختلف المفاهيم أو عند إدماجها كما حظي استعمال تكنولوجيات الإعلام و الاتصال بالاهتمام اللازم.

يحتوي الكتاب على ستة (6) أبواب تمت هيكلتها بنفس الكيفية على النحو التالي:

- عرض للكفاءات المستهدفة إضافة إلى نبذة تاريخية.
- أنشطة تمهيدية.
- الدرس.
- طرائق و تمارين محلولة.
- أعمال موجهة.
- استعداد للبكالوريا.
- تمارين و مسائل.
- اختبار معلوماتك.

أردنا أن نجعل من هذا الكتاب وسيلة عمل ممتعة و ناجعة في آن واحد، نتمنى أن يمكنكم من التحضير الجيد لامتحان نهاية السنة.

و كون هذا العمل إنجازا بشريا فإنه لا يخلو من النقائص، و عليه فإننا نرحب، بكل اهتمام، بانتقادات القراء التي تهدف إلى إثراء و تحسين الكتاب و هم مشكورون مسبقا على ذلك.

1. النهايات والاستمرارية

أنشطة 5

الدرس والطرائق 6

نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$ 8

نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي 10

تقدمات على النهايات 12

نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة 14

الاستمرارية 16

مبرهنة القيم المتوسطة 18

الدوال المستمرة والرتيبة تماما 20

أعمال موجهة 22

استعد للباكالوريا 24

تمارين 26

اختبر معلوماتك 38

2. الاشتقاقية

أنشطة 40

الدرس والطرائق 42

الاشتقاقية 42

المشتقات والعمليات 44

اتجاه تغير دالة 46

اشتقاق دالة مركبة 48

التقريب التآلفي - طريقة أولر 50

دراسة دالة مثلثية 52

أعمال موجهة 54

استعد للباكالوريا 56

تمارين 58

اختبر معلوماتك 74

3. الدوال الأسية واللوغاريتمية

أنشطة 75

الدرس والطرائق 76

الدالة الأسية 78

الدوال الأسية $x \mapsto e^{kx}$ 80

دراسة الدالة الأسية 82

دراسة الدالة $\exp u$ 84

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية 86

الخواص الجبرية 88

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية 90

الدالة اللوغاريتمية العشرية 92

دراسة الدالة $\ln u$ 94

أعمال موجهة 96

استعد للباكالوريا 100

تمارين 102

اختبر معلوماتك 118

4. التزايد المقارن

أنشطة 119

الدرس والطرائق 120

قوى عدد حقيقي موجب تماما 122

دراسة الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto a^x$ 124

التزايد المقارن 126

أعمال موجهة 128

استعد للباكالوريا 132

تمارين 134

اختبر معلوماتك 144

145	5. الدوال الأصلية.....
146	أنشطة.....
	الدرس والطرائق.....
148	الدوال الأصلية.....
150	حساب الدوال الأصلية.....
152	المعادلات التفاضلية.....
154	أعمال موجهة.....
156	استعد للباكالوريا.....
158	تمارين.....
164	اختبر معلوماتك.....
165	6. الحساب التكاملي.....
166	أنشطة.....
	الدرس والطرائق.....
168	تكامل دالة.....
170	خواص التكامل.....
172	القيمة المتوسطة.....
174	التمديد إلى دالة إشارتها كيفية.....
176	توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية.....
178	بعض تطبيقات الحساب التكاملي.....
180	أعمال موجهة.....
182	استعد للباكالوريا.....
184	تمارين.....
198	اختبر معلوماتك.....
199	7. الاحتمالات الشرطية.....
200	أنشطة.....
	الدرس والطرائق.....
202	العد (القوائم — الترتيبات — التبديلات).....
204	التوفيقات — دستور ثنائي الحد.....
206	نمذجة تجربة عشوائية.....
	المتغير العشوائي — الأمل الرياضي والتباين
208	لمتغير عشوائي.....
210	الاحتمالات الشرطية.....
212	الحوادث المستقلة والمتغيرات العشوائية المستقلة.....

214	أعمال موجهة.....
216	استعد للباكالوريا.....
218	تمارين.....
230	اختبر معلوماتك.....
231	8. قوانين الاحتمال.....
232	أنشطة.....
	الدرس والطرائق.....
234	قانون برنولي.....
236	قوانين الاحتمالات المستمرة.....
238	قياس تلاؤم سلسلة مشاهدة ونموذج احتمالي.....
240	القانون الأسي.....
242	أعمال موجهة.....
244	استعد للباكالوريا.....
246	تمارين.....
252	اختبر معلوماتك.....
253	استعمال الحاسبة البيانية.....

النهايات و الاستمرارية 01

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود (المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x) = k$ ، k عدد حقيقي معطى.

كوشي أوغسطين لويس: عالم رياضيات و فيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789م إلى 1857م. كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات، و بصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات و الاستمرار، و طور نظرية الدوال ذات متغيرات عقدية. شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس و العالم لاغرانج و أصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون و كلية فرنسا و بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 فنفى مع حفيد تشارلز العاشر، و عينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذية أنشئ من أجله، و لكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر.



كوشي أوغسطين لويس

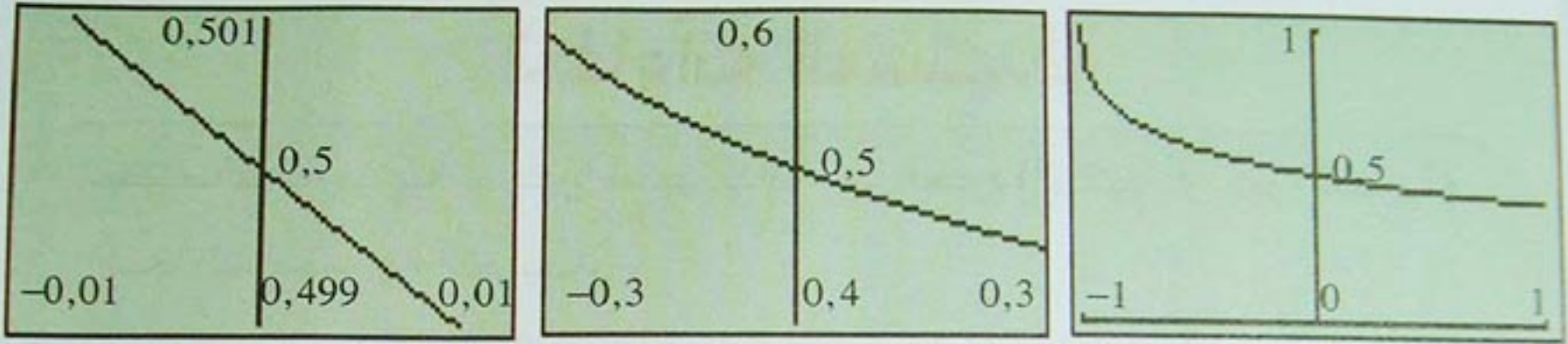
لقد نشر ما مجموعه 789 عملا، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة و نظرية الأعد و المرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الضوء.

نشاط أول

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

(1) وضع تخمين

• أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني (C_f) ثم أنجز التكبيرات (zoom) التالية:



• الدالة f غير معرفة عند 0 إلا أنه بإمكان x أخذ قيم قريبة من 0 بالقدر الذي نريد. ضع في هذه الحالة تخميناً بخصوص قيم $f(x)$.

(2) إثبات صحة التخمين

نعلم أن الدالة $g: x \mapsto \sqrt{x+1}$ قابلة للاشتقاق عند 0.

- عين العدد المشتق للدالة g عند 0.
- استنتج نهاية الدالة f عند 0.

نشاط ثان

(1) دراسة مثال

نعتبر الدالة u المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $u(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ وليكن v الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $v(x) = x^2 + 1$

• عرف الدالة $v \circ u$.

• لاحظ على شاشة حاسبة بيانية أو مجدول سلوك

كل من $u(x)$ و $(v \circ u)(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

• ضع تخميناً بخصوص نهاية الدالة $v \circ u$ عند $+\infty$.

• عين b نهاية الدالة u عند $+\infty$ ثم نهاية الدالة v عند b .

• ماذا تلاحظ؟

(2) وضع تخمين

a, b, c تمثل أعداداً حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ و v, u و f دوال حيث $f = v \circ u$.

إذا فرضنا أن $\lim_{x \rightarrow b} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ ضع تخميناً بخصوص نهاية الدالة f عند a .

	A	B	C
1	x	u(x)	v(u(x))
2	100		
3	200		
4	300		
5			
6			
7			

نشاط ثالث

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \leq x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[]$.

(1) أحسب $[-2, 3]$ ، $E(-1)$ ، $[\sqrt{3}]$ و $E(11,01)$.

(2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[-2; 1]$ كما يلي:

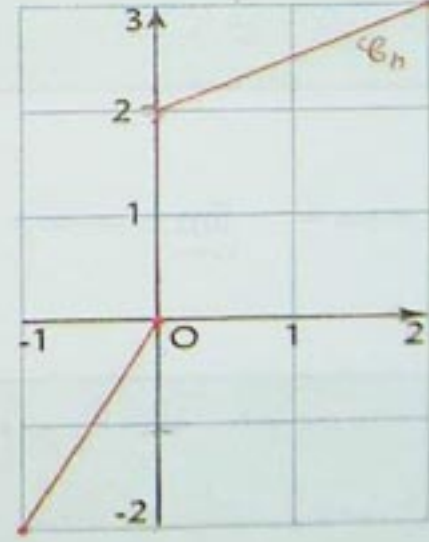
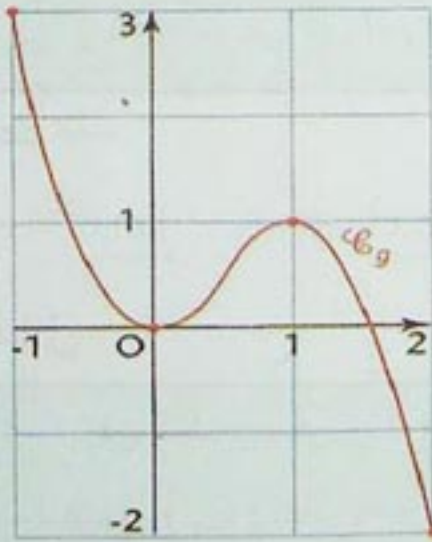
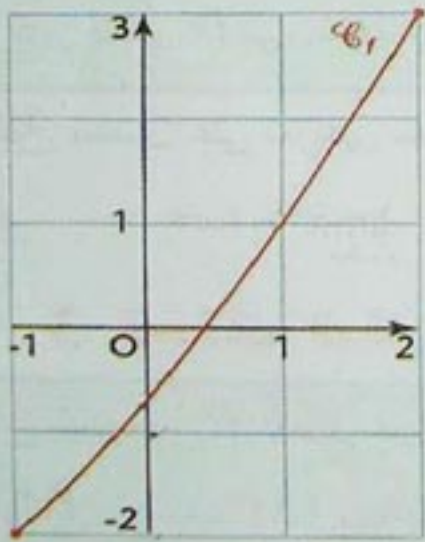
$f(x) = [x]$ ، $g(x) = x - [x]$ ، $h(x) = x^2 + 1$ و لتكن (C_h) ، (C_g) ، (C_f) تمثيلاتها البيانية على

الترتيب.

- أرسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_h) و (C_g) .
- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_h) و (C_g) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- أكتب خلاصة.

نشاط رابع

إليك المنحنيات (C_h) و (C_g) الممثلة على التوالي لثلاث دوال f ، g و h معرفة على المجال $[-1; 2]$ و ليكن k عددا حقيقيا من المجال $[-2; 3]$.



1. هل الدوال f ، g و h مستمرة على المجال $[-1; 2]$ ؟

2. بواسطة قراءة بيانية حدد، حسب قيم العدد الحقيقي k ، عدد حلول كل معادلة من المعادلات التالية:

$$(1) f(x) = k \quad (2) g(x) = k \quad (3) h(x) = k$$

3. ماذا تمثل القيمتان -2 و 3 حدود المجال $[-2; 3]$ ؟

4. من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-2; 3]$ ،

- هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2)، (3) حلا على الأقل في المجال $[-1; 2]$ ؟
- هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2)، (3) حلا وحيدا في المجال $[-1; 2]$ ؟

١. نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

1. نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$ و l عدد حقيقي.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى $+\infty$.

نتيجة: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$.

أمثلة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ *

2. نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف 1: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

تعريف 2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty; B]$ ($B \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$.

أمثلة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = -\infty$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ *

3. المستقيم المقارب المائل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$

القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (\text{على الترتيب } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0)$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$

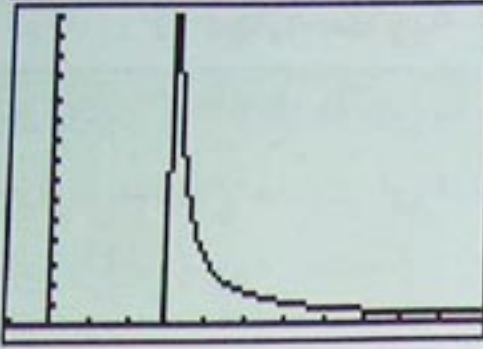
فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

تمرين محلولة 1: لتكن f الدالة المعرفة على $]3; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2}{x-3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



حل: ليكن $I =]a; b[$ حيث $a < 0 < b$ (I مجال مفتوح يشمل 0).

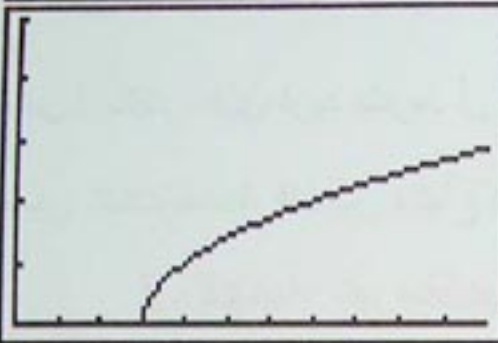
من أجل x من $]3; +\infty[$ ، $f(x) \in I$ يعني $\frac{2}{x-3} < b$ أي $x > 3 + \frac{2}{b}$.

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي (أكبر من $3 + \frac{2}{b}$)، المجال I يشمل كل

قيم $f(x)$. ومنه نهاية f عند $+\infty$ هي 0.

تمرين محلولة 2: لتكن f الدالة المعرفة على $]3; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x-3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



حل: ليكن A عددا حقيقيا موجبا.

$\sqrt{x-3} \geq A$ يعني $x \geq A^2 + 3$ ومنه المجال $[A^2 + 3; +\infty[$

يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

لدينا إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تمرين محلولة 3: لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها

البياني في معلم.

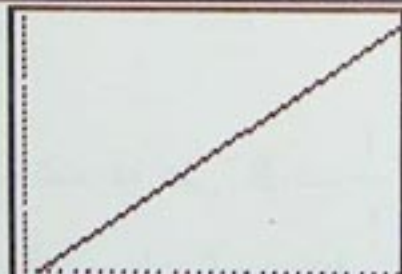
1. بعد تمثيل (C_f) على شاشة حاسبة بيانية، ضع تخمينا بصدد وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) .

2. بين أن المستقيم $(D): y = x - 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

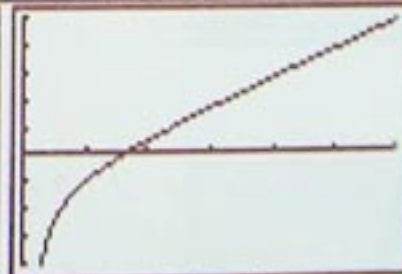
3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

طريقة: لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى $(D): y = ax + b$ ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (ax + b)]$.

WINDOW
Xmin=0
Xmax=50
Xscl=1
Ymin=20
Ymax=50
Yscl=1
Xres=1



WINDOW
Xmin=0
Xmax=6
Xscl=1
Ymin=-4
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1



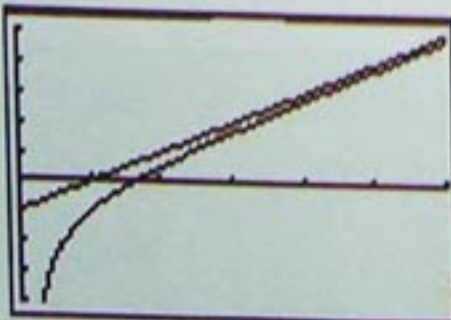
حل: 1.

يظهر و أن المنحني (C_f) يقترب من مستقيم من أجل قيم لـ x كبيرة بالقدر الكافي و منه يمكن أن نخمن بوجود

مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ و منه المستقيم $(D): y = x - 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

عند $+\infty$.



3. $[f(x) - (x - 1)] = -\frac{1}{x}$ و منه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ،

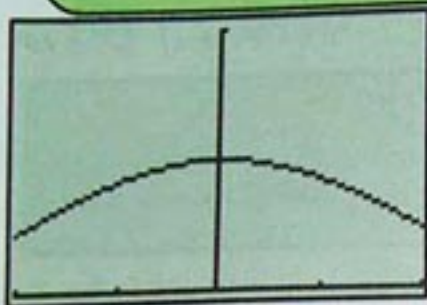
$[f(x) - (x - 1)] < 0$. إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) .

١. نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

1. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a; x_0[\cup]x_0; b[$ و l عدد حقيقي.

القول إن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0 .



مثال: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

تبين شاشة الحاسبة البيانية أنه كلما اقترب x من 0 إلا و اقتربت $f(x)$ من 1.

بإجراء تكبيرات أو باستعمال جداول قيم بواسطة الحاسبة يتضح أكثر أنه يمكننا جعل $f(x)$

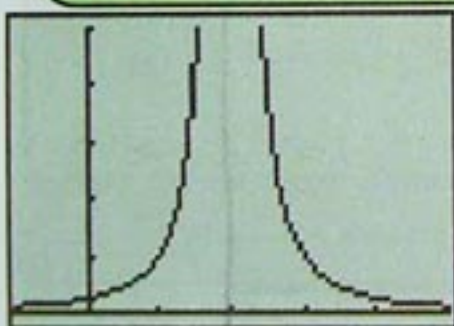
قريب من 1 بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 0 بالقدر الكافي. لدينا إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(يمكن إثبات صحة التخمين بإتباع نفس المنهجية المتبعة في النشاط الأول)

2. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a; x_0[\cup]x_0; b[$.

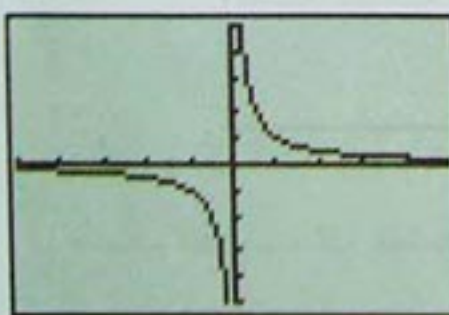
القول إن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى x_0 .



مثال 1: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

يتضح جليا أن $f(x)$ تأخذ قيمة كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 2

بالبقدر الكافي. لدينا هكذا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$



مثال 2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{1}{x}$. نعتبر الدالتين f_1 و f_2

المعرفتين على الترتيب على $]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$ بـ $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$

من الواضح أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = -\infty$

نقول في هذه الحالة أن نهاية f عند 0 من اليسار هي $-\infty$ و أن نهاية f عند 0 من اليمين

هي $+\infty$ و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $x = a$.

القول إن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للملحني (C_f) يعني أن نهاية الدالة f عند x_0 (من اليسار أو من اليمين) هي $+\infty$ أو $-\infty$.

تمرين محلول 1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-1; +\infty[$ بـ $f(x) = (x+1)^2 - 2$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى 1.

1. ضع تخميننا.
2. في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[1,99; 2,01]$ ؟
3. r عدد حقيقي حيث $0 < r < 1$.
- في أي مجال يجب اختيار x بحيث $f(x) \in [2-r; 2+r]$ ؟
- ماذا تستنتج علما أنه يمكن اختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ؟

حل:

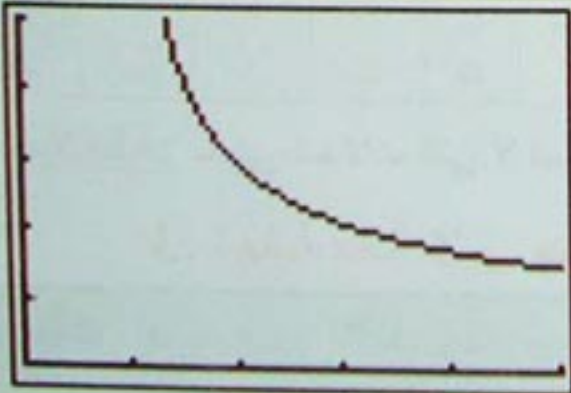
1. يظهر و أنه كلما اقترب x من 1 اقترب $f(x)$ من $(1+1)^2 - 2$ أي من العدد 2.
2. $1,99 \leq f(x) \leq 2,01$ يعني $3,99 \leq (x+1)^2 \leq 4,01$. يمكن اختيار x بحيث $1,998 \leq x+1 \leq 2,002$ أي $0,998 \leq x \leq 1,002$ و منه $x \in [0,998; 1,002]$.
3. $2-r \leq f(x) \leq 2+r$ يعني $4-r \leq (x+1)^2 \leq 4+r$. يمكن اختيار x بحيث $-1 + \sqrt{4-r} \leq x+1 \leq -1 + \sqrt{4+r}$ و منه $x \in [-1 + \sqrt{4-r}; -1 + \sqrt{4+r}]$.
- * يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من 2 بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي 2.

تمرين محلول 2: لتكن f الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}-1}$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

1. مثل منحنى الدالة f على شاشة حاسبة بيانية ثم ضع تخميننا بخصوص نهاية f عند 1.
2. A عدد حقيقي موجب تماما.
- في أي مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x) \geq A$ ؟
- أثبت صحة التخمين الموضوع في السؤال 1.

حل:



1. نخمن بأن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.
2. $f(x) \geq A$ يعني $\frac{3}{\sqrt{x}-1} \geq A$ أي $\sqrt{x}-1 \leq \frac{3}{A}$ أي $x-1 \leq \frac{9}{A^2}$ و أخيرا $x \leq 1 + \frac{9}{A^2}$.
- حتى يكون $f(x) \geq A$ نختار x في المجال $]1; 1 + \frac{9}{A^2}]$.

علما أنه يمكن أخذ A كبيرا بالقدر الذي نريد يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.

١. تتمات على النهايات

1. بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty * & \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty * \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty * & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 * & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 * \end{array}$$

2. العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

• نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

• نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

• نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين" (ح ع ت)

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

قواعد إجرائية: النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).
النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

تمرين محلول 1: أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1. $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = -x^3 + 2x - 2$

2. $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3x^2 + x - 3$

3. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ ، $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

حل:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2) = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$

تمرين محلول 2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$.

2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1 .

3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

حل:

1. لكثير الحدود $x^2 + x - 2$ جذران هما -2 و 1 . و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة 3 نجد:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	+	0	-	+

2. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 3) = -1$ و بما أنه من أجل $x < -2$ ، $x^2 + x - 2 > 0$

فإن $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 3) = -1$ و بما أنه من أجل $-2 < x < 1$ ، $x^2 + x - 2 < 0$

فإن $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$ و بما أنه من أجل $-2 < x < 1$ ، $x^2 + x - 2 < 0$

فإن $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$ و بما أنه من أجل $x > 1$ ، $x^2 + x - 2 > 0$

فإن $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$

١. نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة

1. نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a, b, c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، u, v و f دوال حيث $f = v \circ u$.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و إذا كانت $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

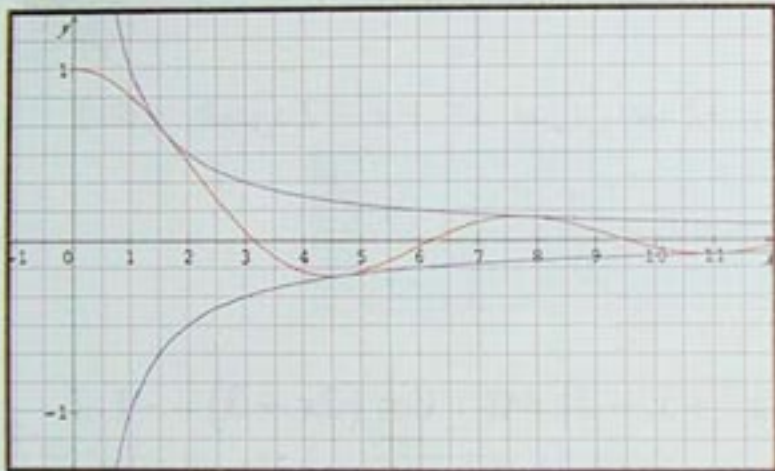
مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$ و نريد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ و $v(x) = \sin x$ و $(f = v \circ u)$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} v(x) = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

2. النهايات بالمقارنة

مبرهنة 1: f, g, h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

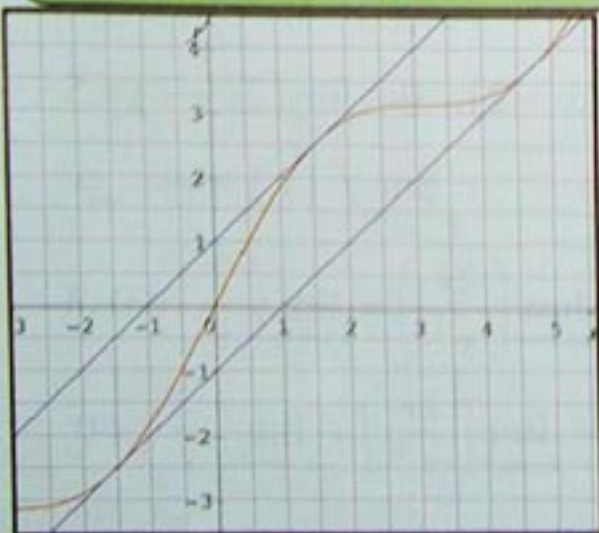
نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ و منه فإن

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[$$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

مبرهنة 2: f, g دالتان. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \geq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

مبرهنة 3: f, g دالتان. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \leq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



ملاحظة: تعدد هذه المبرهنات إلى حالتها النهائية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \sin x$

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ و منه فإن

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1 \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

تمرين محلول 1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty]$ بـ $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

حل:

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $v(x) = \sqrt{x}$ و $(f = v \circ u)$

* بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{2}$ نجد كذلك $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$

* بما أن $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} u(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0$

* بما أن $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{x^2}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x^2}$

2. استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

حل:

1. نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \cos x \leq 1$ و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $1 - \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{\cos x}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{x^2}$ أي $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x^2}$

2. بما أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

تمرين محلول 3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x}{2 + \sin x}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$

2. استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

حل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ و منه $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ أي $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$

2. لدينا $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x}$ و من أجل x من $]-\infty; 0]$ لدينا $\frac{x}{2 + \sin x} \leq \frac{x}{3}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

لدينا $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x}$ و من أجل x من $[0; +\infty[$ لدينا $\frac{x}{2 + \sin x} \geq \frac{x}{3}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

١. الاستمرارية

١. تعريف الاستمرارية

تعريف: دالة f مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f .
القول إن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$.

$$(f \text{ مستمرة عند } a) \text{ يعني } (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a))$$

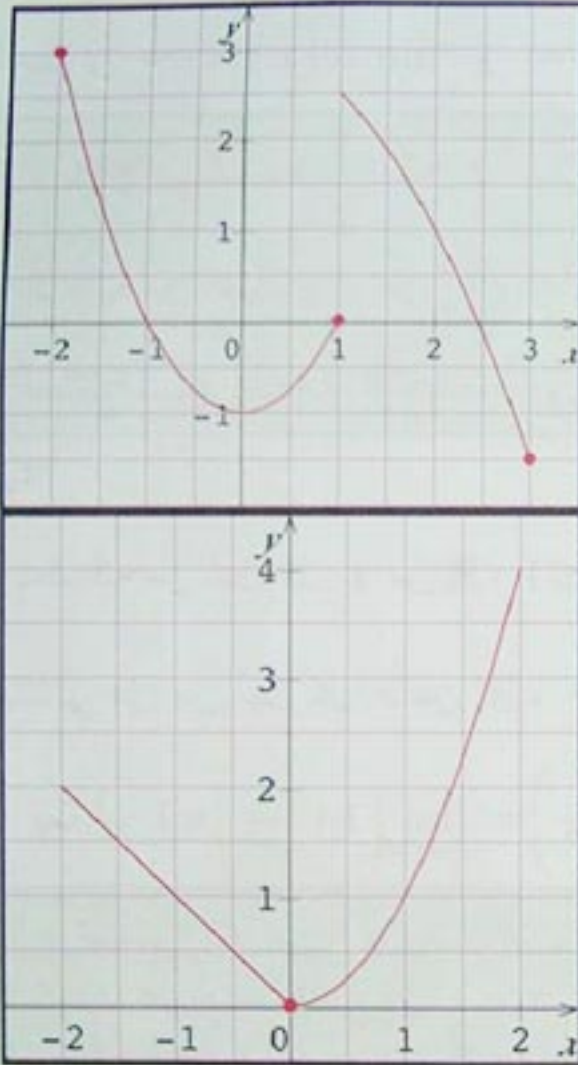
ملاحظة: القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I .

التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيتها البياني على هذا المجال دون

رفع القلم (اليد).

مثال 1:

الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-2; 3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيتها البياني دون رفع القلم.
في حين نلاحظ أنها مستمرة على كل من المجالين $[-2; 1]$ و $[1; 3]$.



مثال 2:

الدالة f المعرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ:
إذا كان $x \in [-2; 0]$ فإن $f(x) = -x$
و إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) = x^2$
و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $[-2; 2]$ لأنه
باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.

2. خواص (تقبل دون برهان)

تقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ و $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة:

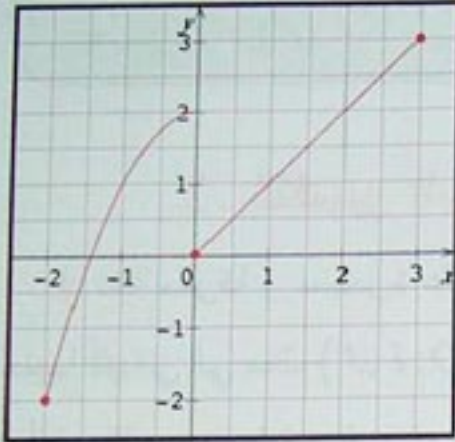
- الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \frac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty; -1[$ ، $]-1; 1[$ و $]1; +\infty[$.

تمرين محلول 1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{إذا كان } x \in [-2;0[\\ x & \text{إذا كان } x \in [0;3] \end{cases}$$

1. مثل بيانيا الدالة f . هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟
2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

حل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ ولدينا من جهة ثانية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \text{ إذن لا تقبل الدالة } f \text{ نهاية عند } 0.$$

2. الدالة غير مستمرة عند 0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.

نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل:

الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto x^2 + x + 1$ مستمרותان على $\mathbb{R}$.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين محلول 3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2]$ بـ: $f(x) = xE(x) + 1$

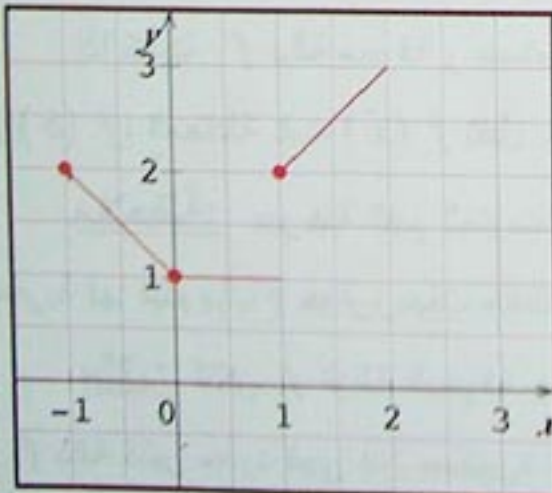
حيث الدالة $E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول)

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0]$ ، $[0;1]$ و $[1;2]$.

2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة f .

3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1]$ ؟ على المجال $[-1;2]$ ؟

حل:



1. من أجل $x \in [-1;0]$ لدينا $E(x) = -1$ ومنه $f(x) = -x + 1$

من أجل $x \in [0;1]$ لدينا $E(x) = 0$ ومنه $f(x) = 1$

من أجل $x \in [1;2]$ لدينا $E(x) = 1$ ومنه $f(x) = x + 1$

2. انظر الشكل المقابل.

3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1]$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني

في هذا المجال دون رفع القلم.

الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;2]$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها

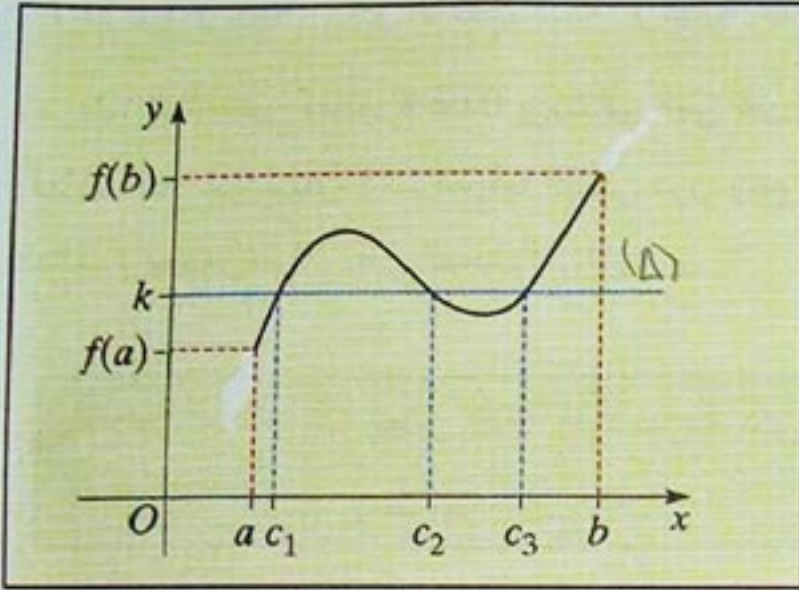
البياني دون رفع القلم.

مبرهنة القيم المتوسطة

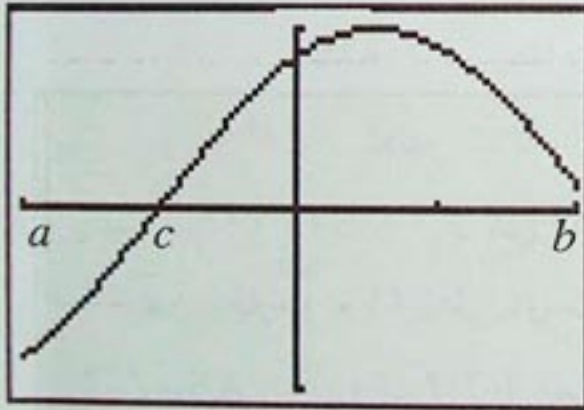
1. مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$.

2. التفسير البياني



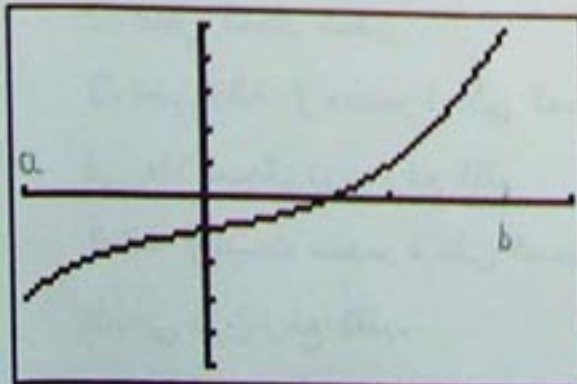
f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$ و ليكن (C) منحنيا البياني في معلم $(O; I, J)$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحني (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .
(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1, c_2 و c_3).



حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$ و كان $f(a) \times f(b) < 0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = 0$. أي أن f تتعدم على الأقل مرة واحدة على $[a; b]$.

3. المعادلة $f(x) = k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b .
ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x) = k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.



مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 + x - 1$.
 f دالة كثير حدود فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا $f(0) = -1$ و $f(1) = 1$ ، العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ ومنه، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

تمرين محلول 1: برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2; 1]$.

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a; b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$.
- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a; b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

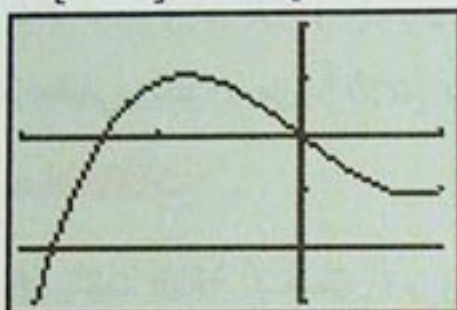
حل: يمكن كتابة المعادلة $x^3 - 2x = -2$ على الشكل $f(x) = -2$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x^3 - 2x \quad (\text{يمكن اختيار كتابة أخرى مماثلة})$$

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و من ثم على $[-2; 1]$.

لدينا $f(-2) = -4$ و $f(1) = -1$ كما نلاحظ أن العدد -2 محصور بين العددين -4 و -1 .

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2; 1]$.



ملاحظة: يمكن مراقبة النتيجة باستعمال حاسبة بيانية بحيث يتم

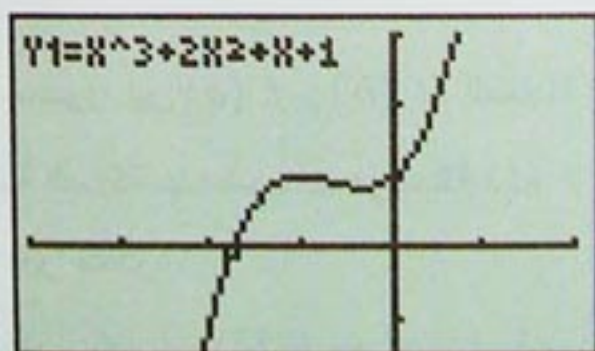
تمثيل الدالة f و المستقيم ذا المعادلة $y = -2$ ثم ملاحظة تقاطعهما.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

1. أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة f .
2. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في مجال يطلب تحديده.

حل:

1. نحصل مثلا على الشكل المقابل.



```
WINDOW
Xmin=-4
Xmax=2
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=3
Yscl=1
Xres=1
```

2. يوحي الشكل بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا محصورا بين -2 و -1 .

بما أن f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2; -1]$.

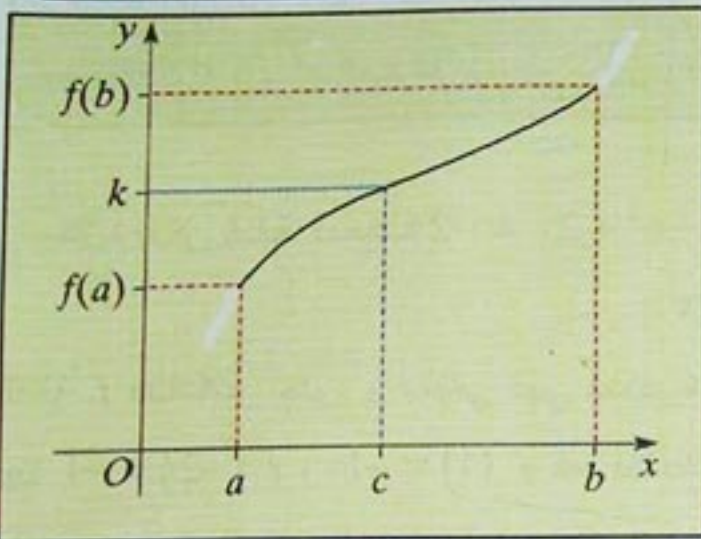
لدينا من جهة ثانية $f(-2) = -1$ و $f(-1) = 1$ و بما أن 0 محصور بين -1 و 1 أي بين $f(-2)$ و $f(-1)$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2; -1]$.

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

1. الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a; b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a; b]$.



البرهان:

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a; b]$.
و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة
القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b
بحيث $f(c) = k$.
لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c ، محصور بين a و b
و يحقق $f(c') = k$.

يكون لدينا حينئذ $c \neq c'$ و $f(c) = f(c')$ وهذا يناقض الرتبة التامة للدالة f على المجال $[a; b]$.
و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a; b]$ بحيث $f(c) = k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = k$.

2. ملاحظات

ملاحظة 1: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a; b]$ فإن

جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a; b]$.

ملاحظة 2: تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مغلق من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

تذكير: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رقابة الدالة على المجال المعطى.

مثال:

$$\text{لنكن } f \text{ الدالة المعرفة على }]-1; +\infty[\text{ بـ } f(x) = \frac{2}{x+1}$$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $] -1; +\infty[$ و لدينا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

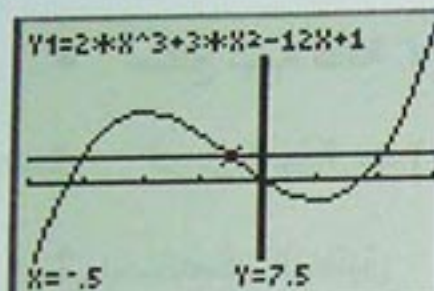
إن من أجل كل عدد حقيقي k من $]0; +\infty[$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $] -1; +\infty[$.

تمرين محلول 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـ: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
2. أرسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باختيار نافذة مناسبة.
3. بين أن المعادلة $f(x) = 8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2} .

حل:

1. من أجل كل x من $[-4;3]$ ، $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$



WINDOW
Xmin=-4
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-31
Ymax=46
Yscl=1
Xres=1

x	-4	-2	1	3
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-31	21	-6	46

أنظر الشكل المقابل.

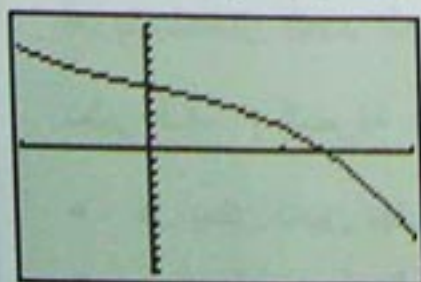
2. لدينا $f(-2) = 21$ ، $f(1) = -6$ و $-6 \leq 8 \leq 21$. دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على المجال $[-2;1]$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 8$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2;1]$. و بما أن f متناقصة تماما على $[-2;1]$ فإن c وحيد.
3. لتعيين حصرا للحل c يمكننا، بعد تمثيل المستقيم ذي المعادلة $y = 8$ ، إظهار قيم مقربة لإحداثيي نقطة التقاطع و هكذا نقرأ $c \approx -0,5370446$ و منه نستنتج الحصر التالي: $-0,54 < c < -0,53$.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x^3 - 2x + 5$

1. برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .
2. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة f ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-1} .
3. عين حسب قيم x إشارة الدالة f .

حل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = -(3x^2 + 2)$ و بالتالي لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) < 0$. إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
- لدينا كذلك $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. كما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها كثير حدود.



A	B
x	$f(x)$
1	2
1,1	1,469
1,2	0,872
1,3	0,203
1,4	-0,544
1,5	-1,375
1,6	-2,296
1,7	-3,313

- نستنتج مما سبق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .
2. نثبت بإتباع مثلا نفس الطريقة السابقة أو باستعمال مجداول أو باستعمال جدول قيم مع اختيار الخطوة 0,1 أن $1,3 < \alpha < 1,4$.

3. من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $f(x) > 0$ و من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $f(x) < 0$.

إزالة حالة عدم التعيين

1. بالاختزال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$

- أحسب $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 + x + 2)$ و $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2)$. هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند -2 ؟
- قم بتحليل كل من $x^3 + 2x^2 + x + 2$ و $x^2 + x - 2$
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ ، $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$
- استنتج نهاية الدالة f عند -2 .

تطبيق: أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

2. باستعمال التحليل

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة ؟ لماذا ؟
- بين أنه من أجل كل x من $[1; +\infty[$ ، $f(x) = x \left(2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right)$
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = x + 2 - \sqrt{x}$

3. باستعمال المرافق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x}$

- تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$.
- بين أنه من أجل كل x من $[2; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $]-\infty; -1]$ بـ $g(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 + x}$

4. باستعمال العدد المشتق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟
- باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x \mapsto \cos x$ عين نهاية الدالة f عند 0 .

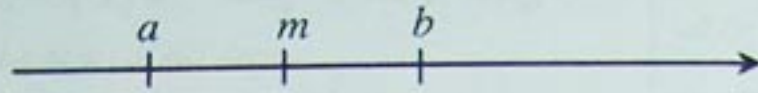
تطبيق: أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $[-4; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف

المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماماً على مجال $[a; b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$

فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[a; b]$.

نعلم أن $m = \frac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a; b]$.



1. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a) \times f(m) < 0$ ؟

2. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a) \times f(m) > 0$ ؟

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m وذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

تعيين حصر لـ α :

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1. برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[2; 3]$.

2. بحساب $f(m)$ ، حيث m هو مركز $[2; 3]$ ، عين حصر لـ α سعته 0,5.

3. بتعويض 2 و 3 بحدي الحصر السابق و بإتباع نفس المنهجية أوجد حصر لـ α . ما هي سعته ؟

4. ما هي سعة الحصر المحصل عليه بعد n مرحلة علماً أنه في كل مرحلة يتم قسمة السعة على 2 ؟

استعمال مجلد:

برامج لحاسبة بيانية:

TI 82-83

TI 89-92

Casio Graph

Prompt A, B, E	Dicho()	? → A
While B - A ≥ E	Prgm	? → B
(A + B)/2 → C	Local c	? → E
A → X	Prompt a, b, e	While B - A ≥ E
Y1 → F	While b - a ≥ e	A → X
C → X	(a + b)/2 → c	Y1 → F
Y1 → G	If Y1(a) * Y1(b) ≤ 0 Then	(A + B)/2 → X
If F × G ≤ 0	c → b	Y1 → G
Then	Else	If F × G ≤ 0
C → B	c → a	Then X → B
Else	EndIf	Else X → A
C → A	EndWhile	IfEnd
End	Disp a, b	WhileEnd
End	EndPrgm	A
Disp A, B		B

1. لمتابعة العملية السابقة أنجز ورق الحساب أسفله

بإتباع الخطوات التالية:

- نحجز في الخلية D2 : $(B2 + C2) / 2$
- نحجز في الخلية E2 : $B2^3 - 3 * B2 - 3$ ثم ننقلها نحو كل من الخليتين F2 و G2.
- في الخليتين B3 و C3 نحجز على الترتيب:
 $= SI(E2 * G2 < 0; B2; D2)$ و
 $= SI(E2 * G2 < 0; D2; C2)$ ثم نسحب نحو

الأسفل في كل عمود من أعمدة ورقة الحساب.

2. ابتداء من أي قيمة لـ n تكون سعة حصر العدد α أصغر من 10^{-5} ؟

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a	b	$m=(a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	b-a
2	0	2	3	2.5	-1	15	5.125	1
3	1	2	2.5	2.25	-1	5.125	1.640625	0.5
4	2	2	2.25	2.125	-1	1.640625	0.220703	0.25
5	3	2	2.125	2.0625	-1	0.220703	-0.41382	0.125
6	4	2.0625	2.125	2.09375	-0.41382	0.220703	-0.10269	0.0625
7	5	2.09375	2.125	2.109375	-0.10269	0.220703	0.057461	0.03125
8	6	2.09375	2.109375	2.10563	-0.10269	0.057461	-0.023	0.015625
9	7	2.10563	2.109375	2.105469	-0.023	0.057461	0.017134	0.007813
10	8	2.10563	2.105469	2.103516	-0.023	0.017134	-0.00296	0.003906

2. أ- بين أن $[u(x) + 2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$.
 ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x) > 0$.
 استنتج إشارة $[u(x) + 2x]$.
 ج- فسّر هذه النتائج ببيانها .
 نقبل أن الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أرسم $\mathcal{C}$ ومستقيمه المقارب المائل .

- التمرين : حسب بكالوريا
 $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم متعامد للمستوي ، وحدة الرسم هي 1cm .
 نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
 $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. نسمي $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني .
 1. أ- عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$.
 ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا :
 $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$. استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$.

تعاليل

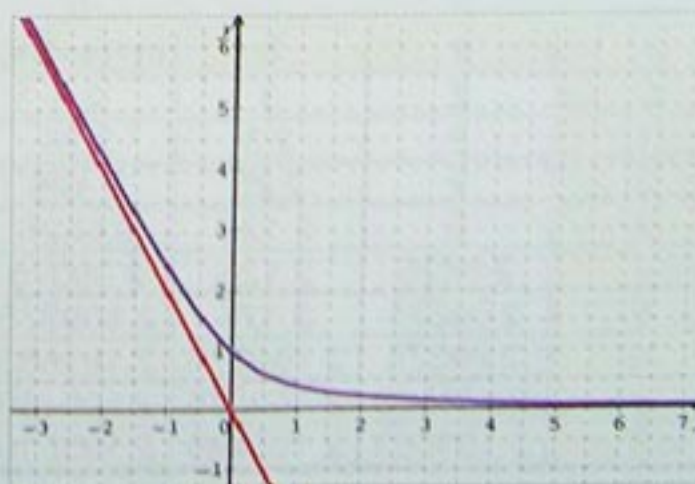
نلاحظ أن هناك نهاية لدالة مركبة .
 استعمال المرافق لإزالة حالة عدم التعيين .
 إذن يكون حامل محور الفواصل مقاربا أفقيا للمنحني $\mathcal{C}$.

$u(x) + 2x > 0$ معناه $u(x) > -2x$
 وبالتالي يقع $\mathcal{C}$ فوق D .

لاحظ أن $u(0) = 1$

حل مختصر

1. أ- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$
 ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = +\infty$
 ب- $u(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$
 بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$
 2. أ- من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x) + 2x = \sqrt{x^2 + 1} + x$ ومنه
 $u(x) + 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ حسب أ- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = +\infty$ إذن
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [u(x) + 2x] = 0$
 ب- من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$
 وبالتالي إذا كان $x \leq 0$ فإن $u(x) > 0$ ، وإذا كان $x \geq 0$ فإن $u(x) > 0$.
 إذن من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x) > 0$.
 وحسب 1. أ- من أجل كل حقيقي x ، $u(x) + 2x = \frac{1}{u(x)}$ إذن $u(x) + 2x > 0$
 ج- المستقيم D ذي المعادلة $y = -2x$ هو مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}$ ، و $\mathcal{C}$ يقع فوق المستقيم D .



تنبيه

في بعض الاستدلالات نتبع طرائق استقرائية ، أي عند تحليل قضية يطلب تبريرها (تكون شرطاً كافياً) نجدها صحيحة .

التمرين

ليكن b عدداً حقيقياً موجباً تماماً .

1. عتبر بدلالة b عن عدد A_1 حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً وأكبر من A_1 يكون $\frac{1}{x} < b$.
2. عتبر بدلالة b عن عدد A_2 حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً وأكبر من A_2 يكون $\frac{1}{2x+1} < b$.
3. لنكن f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x من هذا المجال يكون :

$$-\frac{1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

أ- عتبر عدداً A ، بدلالة b ، حيث من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً وأكبر من أو يساوي A يكون $f(x) \in]-b; b[$.

ب- ما هي الخاصية على الدالة f التي برهنت في السؤال السابق ؟

ج- اقترح تبريراً آخر لهذه الخاصية باستعمال مبرهنة درست يطلب كتابتها كلياً وبدقة .

توجيهات

1. عين شرطاً على x حتى يكون $\frac{1}{x} < b$ ثم استنتج A_1 .
2. يمكن استعمال النتيجة السابقة حتى يكون الشرط $\frac{1}{2x+1} < b$ كافياً لضمان الشرط $2x+1 > A_1$.

3. أ- لكي يكون $f(x) \in]-b; b[$ يكفي أن يكون $\frac{1}{x} < b$ و $-\frac{1}{2x+1} > -b$.

ب- تذكر مفهوم النهاية .

ج- $\frac{-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ استعمال المبرهنة حول النهاية والحصص .

تمارين تطبيقية

1 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$$

(1) أوجد عدداً حقيقياً A حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[2, 9; 3, 1]$.

(2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 3$ مقارب للمنحنى C_f الممثل لدالة f .

(3) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ .

2 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

(1) أوجد عدداً حقيقياً A حيث إذا كان $x < A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[0, 9; 1, 1]$.

(2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 1$ مقارب للمنحنى C_f الممثل لدالة f .

(3) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ .

3 أثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

4 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 3$

أثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5 لتكن الدالة f المعرفة

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

أثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

6 لتكن الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم.

(1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

(2) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ .

7 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم.

(1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب للمنحنى C_f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(2) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ .

• في التمارين من 8 إلى 11 اذكر إن كان منحنى الدالة f يقبل المستقيم Δ كمستقيم مقارب عند $-\infty$

و عند $+\infty$ ثم حدد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ .

8 (أ) $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ، $\Delta: y = 1$

(ب) $f(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}$ ، $\Delta: y = -\frac{1}{3}$

9 (أ) $f(x) = 2x + 1 + \frac{5}{x-3}$ ، $\Delta: y = 2x + 1$

(ب) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2 - 1}$ ، $\Delta: y = -\frac{1}{2}x$

10 (أ) $f(x) = x + 3 - \frac{2}{|x|}$ ، $\Delta: y = x + 3$

(ب) $f(x) = \frac{\sin x}{x} - x + 1$ ، $\Delta: y = -x + 1$

11 (أ) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x}$ ، $\Delta: y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

(ب) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ ، $\Delta: y = x$

2 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقى

12 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 3$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

(1) ضع تخميناً لسلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

(2) في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]6, 99; 7, 01[$ ؟

(3) α عدد حقيقى حيث $0 < \alpha < 1$

• في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]-7-\alpha; 7+\alpha[$ ؟

• علما أننا نختار α صغير بالقدر الذي نريد ، ماذا تستنتج؟

13 - خمن النهاية عند 4 للدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

- أوجد مجالا I مركزه 4 بحيث إذا كان $x \in I$ فإن $f(x) \in]2,95; 3,05[$

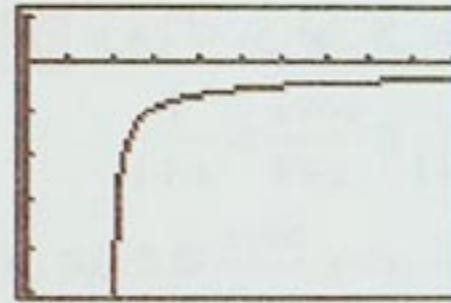
14 خمن النهاية عند 2 للدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3x+4}{(x-2)^2}$$

كان $x \in]2-a; 2+a[$ فإن $f(x) > 10^3$

15 لتكن الدالة f المعرفة على $]2; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$



(1) الشكل التالي هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f على شاشة حاسبة بيانية.

• ماذا تخمن بالنسبة سلوك الدالة f عندما يؤول x إلى 2؟

(2) A عدد حقيقي موجب تماما

• في أي مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x) \leq -A$ ؟

• أثبت صحة التخمين السابق.

(3) ماذا يمكن القول عن المستقيم الذي معادلته $x = 2$

بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

16 (1) ادرس النهاية عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ وعند 1 للدالة f

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$$

(2) حدد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f

و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

17 f هي الدالة العددية المعرفة بـ: $f(x) = \frac{-3x}{x+2}$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

(2) حدد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f

و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

3- تكمات على النهايات

• في التمارين من 18 إلى 22 وفي كل حالة من الحالات ادرس نهاية الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس النهاية على يمين و على يسار a

18 (أ) $f(x) = 2x^3 - x + 1$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

(ب) $f(x) = -3x^4 + 2x + 4$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

(ج) $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

19 (أ) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1

(ب) $f(x) = \frac{2x^2+5}{x-2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 2

(ج) $f(x) = \frac{-4x+1}{3-x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 3

20 (أ) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

(ب) $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 2

(ج) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 0

21 (أ) $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عن 0

(ب) $f(x) = 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1

(ج) $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x-3}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 3

22 (أ) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(4-x)}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ،

عند 1 ، عند 4

(ب) $f(x) = 2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ،

عند -1 ، عند 3

(ج) $f(x) = x^2 + \frac{1}{(x+2)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -2

• في التمارين من 23 إلى 28 ، في كل حالة من

الحالات وباستعمال العمليات على النهايات ادرس نهاية

4 - نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة

30 احسب النهايات التالية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{3-6x}{1-x}} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{3x+4}{x-3}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3+x-3}$$

31 f هي الدالة المعرفة على $[-2; 2]$ - ب:

$$f(x) = \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$$

احسب نهاية الدالة f عند -2 و عند 2 .

32 احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{\sin x}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

33 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -1$:

$$\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

هل تقبل الدالة $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ نهاية عند $+\infty$ ؟

34 f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$,

$$\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$$

هل تقبل f نهاية عند $+\infty$ ؟

35 f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$:

$$|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

36 f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x < 0$:

$$f(x) \leq -2x^3$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

37 f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x^4 + x$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس إن كان ضروريا النهاية عند a على اليمين أو على اليسار.

23 أ) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x} + 1$ عند $+\infty$

ب) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}$ عند $+\infty$ ، عند 1

24 أ) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ عند 4

ب) $f(x) = (1-x)(2-\sqrt{-x})$ عند $-\infty$ ، عند 0

25 أ) $f(x) = \frac{2}{x} - \cos x$ عند 0 ، عند $+\infty$

ب) $f(x) = \sin(2x) + x$ عند $\frac{\pi}{4}$ ، عند $+\infty$

26 أ) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ عند $+\infty$

ب) $f(x) = \frac{x+2}{3-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

27 أ) $f(x) = \sqrt{x} - 1 - 2x$ عند $+\infty$

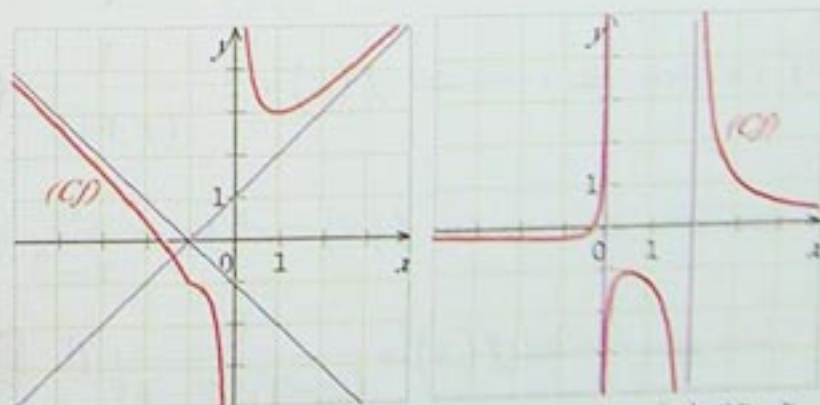
ب) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1 - \sqrt{x}}{x^2 + 2}$ عند $+\infty$

28 أ) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ عند $+\infty$

ب) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$ عند $-\infty$

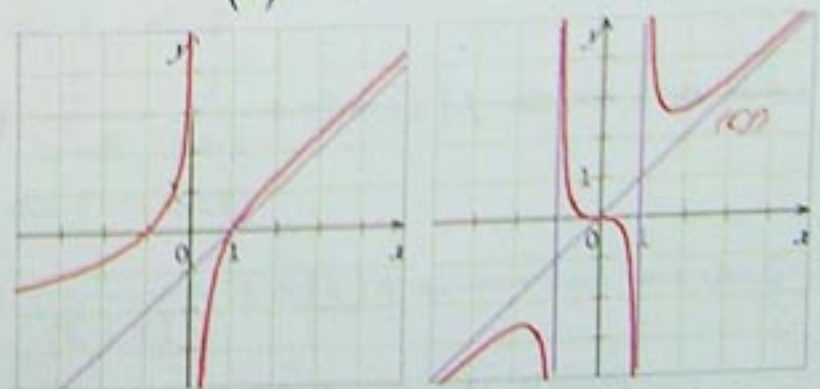
29 المنحني C_f هو التمثيل البياني الممثل لدالة f

في كل حالة من الحالات الثلاث عين D مجموعة تعريف الدالة f ثم خمن النهايات في أطراف المجموعة D .



الحالة (2)

الحالة (1)



الحالة (4)

الحالة (3)

38 (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$1 \leq 3 + 2 \cos x \leq 5$$

(2) هل تقبل الدالة $f: x \mapsto \frac{x-1}{3+2 \cos x}$ نهاية عند $+\infty$ ؟

39 (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$x^2 - 3 \sin x \geq x^2 - 3$$

(2) هل تقبل الدالة $f: x \mapsto x^2 - \sin 3x$ نهاية عند $+\infty$ ؟

40 هل تقبل الدالة $f: x \mapsto x^2 + 2x \sin x$ نهاية عند

$+\infty$ و عند $-\infty$ ؟

41 f دالة معرفة على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$:-

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{2x + 1}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\frac{1}{2}$:

$$\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

(2) هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

5 - الاستمرارية

42 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2; 4]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x & ; \quad x \in [-2; 1[\\ f(x) = x - 1 & ; \quad x \in [1; 4] \end{cases}$$

(1) مثل بيانيا الدالة f في معلم. هل تقبل الدالة f نهاية عند 1؟

(2) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2; 4]$ ؟ لماذا؟

(3) اذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

43 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 & ; \quad x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

(1) ادرس استمرارية الدالة f عند 2.

(2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

44 ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$:-

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + 2 & ; \quad x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

45 f الدالة العددية المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad \text{إذا كان } x \neq 1 \quad \text{و } f(1) = 3$$

(1) ادرس استمرارية f عند 1.

(2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

46 لتكن الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R} - \{1\}$ و

على الترتيب كما يلي:

$$f(x) = 2x^3 - x + 1 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$

ادرس استمرارية f و g .

47 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$:-

$$f(x) = (x^2 - x) \sin x$$

لماذا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

48 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$:-

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

ادرس استمرارية f .

49 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2; 1]$ كما يلي:

$$f(x) = x(x + E(x))$$

حيث $x \mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

(1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية:

$$[-2; -1], \quad [-1; 0], \quad [0; 1]$$

(2) ارسم في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحني الممثل للدالة f .

(3) هل الدالة f مستمرة

على $[-2; -1]$ ، $[-2; 0]$ ، $[-2; 1]$ ؟

6 - مبرهنة القيم المتوسطة

50 برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة

$$x^3 - 4x = -2$$

x	-3	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	4	2

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما.

57 إليك جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{13}{6}$	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$

لماذا المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$ ؟

7 - الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

58 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; 2]$ بـ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

(1) احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) ارسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باستعمال نافذة مناسبة.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $[-1; 2]$.

(4) باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2} .

59 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 5$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

(3) باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذا الحل.

51 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; 2]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = -2x + 3 & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(1) هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلولا في المجال $[0; 2]$ ؟

(2) تحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في $[0; 2]$.

52 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$$

(1) احسب $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$, $f(1)$

(2) استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1; 1]$

53 f هي الدالة المعرفة على $[-3; 6]$ بـ:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

(2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 30$.

54 بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا.

55 بين أن المعادلات التالية تقبل على الأقل حلا في المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1) I = [-1; 0] , 2x^3 + 1 = 0$$

$$(2) I = [1; 2] , x^5 + 3x^4 - 6x^2 - 1 = 0$$

$$(3) I = \left[\frac{1}{2}; 1\right] , x^4 + 4x - 3 = 0$$

$$(4) I = \left[1; \frac{3}{2}\right] , -x^3 + 3x^2 = 3$$

$$(5) I = [0; \pi] , \frac{1}{2} \sin x + 2 = x$$

56 لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3; +\infty[$

و جدول تغيراتها هو الآتي:

60 نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;2]$ بـ:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا

α في $[1;2]$ (3) باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة

إلى 10^{-2} لـ α

61 بين أن المعادلة $2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$ تقبل حلا وحيدا

في المجال $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$.

62 بين أن المعادلة $\frac{1}{x+2} = 2 \cos x$ تقبل حلا وحيدا

في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

63 لتكن الدالة f المعرفة على $[0; \pi]$ بـ:

$$f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x + 2$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي

وحيد α من $[0; \pi]$ بحيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$

64 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$$

(1) ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(2) أ) احسب f' مشتقة الدالة f ثم ادرس إشارتها.

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا على كل

مجال من المجالات التالية: $[-1; 0]$ ، $[0; 1]$ ، $[2; 3]$

65 f دالة معرفة على $[0; \pi]$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin x$$

• بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0; \pi]$ بحيث

$$f(\alpha) = \alpha$$

66 لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$$

(1) بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $D = [0; 2]$

(2) لتكن الدالة g المعرفة على D بـ: $g(x) = f(x) - x$

• بين أن الدالة g متناقصة تماما على D .

• احسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة

$f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

67 نعتبر الدالتين $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g: x \mapsto -x^3$

• بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f

و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

حيث $-\frac{7}{8} < x_0 < -\frac{3}{4}$.

تمارين للتعمق

1 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

68 f هي الدالة المعرفة على $[3; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

(1) أوجد عددا حقيقيا A حيث إذا كان $x > A$ فإن

$f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,99; 1,01[$.

(2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 1$ مقارب

للمنحني C_f الممثل لدالة f ، ثم ادرس وضعية C_f بالنسبة

إلى Δ .

69 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. أوجد عددا حقيقيا $A > 0$

حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) > 10^6$

70 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

(1) ادرس نهاية الدالة f عند 1.

(2) أوجد مجالا I مركزه 1 حيث من أجل كل x من I ،

$$f(x) > 10^6$$

71 لتكن الدالة f حيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$

و (C) تمثيلها البياني.

عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث: (C) يقبل مستقيماً مقارباً معادلته $x = 1$ و مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته

$y = 2x + 3$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$

72 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$$

(1) عين a, b, c, d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$$
 يكون

(2) استنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له

(3) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى Δ .

73 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)]$

(2) استنتج وجود مستقيم مقارب مائل Δ للمنحني (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) بين أنه يوجد عدنان حقيقيان α و β بحيث

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta$$

(ج) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيماً مقارباً Δ' عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

74 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^+$ على

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad \text{الترتيب بـ :}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$$
 و

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]$

• ما هو التخمين الذي تضعه حول السلوك التقاربي للدالتين f و g عند $+\infty$ ؟

(3) حدّد بدون حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x+2)]$

ماذا تستنتج ؟

75 f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم.

(1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x + 3$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$

(2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C) و Δ .

76 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم.

(1) عين D مجموعة تعريف الدالة f .

(2) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right]$

(4) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ و Δ' يطلب تعيين معادلتيهما.

(5) حدّد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من Δ و Δ' .

المنحنيات المتقاربة

77 f هي الدالة المعرفة على $]-2; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x+2}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم .

(1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$

(ب) اشرح لماذا المنحني (C) و المنحني (P) الذي

معادلته $y = x^2$ " يتقاربان شيئاً فشيئاً " عندما يؤول x إلى $+\infty$.

نقول في هذه الحالة أن المنحنيين (C) و (P) متقاربان عند $+\infty$.

(ج) ارسم (C) ثم (P) .

78 f هي الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x-1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم .

(1) ابحث عن منحن (P) مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ ، ثم

حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P) .

(2) هل (C) و (P) متقاربان عند $-\infty$.

79 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم .

ابحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب

للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم حدد الوضعية النسبية

لـ (C) و (P) .

80 f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم

ابحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب

للمنحني (C) عند $+\infty$ ، ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C)

و (P) .

3. تتمات على النهايات

81 f هي الدالة المعرفة على $D = \mathbb{R} - \{-1; 4\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$$

(1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، c حيث من أجل

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4} \quad \text{كل } x \text{ من } D$$

(2) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجالات التعريف.

82 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف

الدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$(1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3} \quad , \quad (2) \quad f(x) = \frac{3x}{(x+1)^2}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+x-2} \quad , \quad (4) \quad f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2-4} \quad , \quad (6) \quad f(x) = \frac{(x+2)^3-8}{x}$$

83 باستعمال المرافق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2+3}$$

حيث $a > 0$ و $b > 0$.

84 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$$

85 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{علما أن}$$

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{4x}$$

87 احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} \quad (2), \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad (4), \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x} \quad (6), \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} \quad (5)$$

88 باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{3}$ لكل من

$$x \mapsto \sin 3x \quad \text{و} \quad x \mapsto 2\cos x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} \quad \text{احسب النهاية التالية}$$

89 باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ لكل من

$$x \mapsto \tan x \quad \text{و} \quad x \mapsto 2\cos x - \sqrt{2} \quad \text{احسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}} \quad \text{النهاية التالية}$$

90 بين باستعمال طريقة مناسبة أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x = 2 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = 2 \quad \text{و}$$

4 - نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة

91 باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \quad (2), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x-4}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (4), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2-x+3} \quad (3)$$

92 باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} \quad (2), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right) \quad (4), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right) \quad (6), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} \quad (5)$$

93 نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} \quad x > 1$$

$$(1) \quad \text{بين أنه إذا كان } x > 1 \text{ فإن: } \frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$(2) \quad \text{استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

94 (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$0 \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(2) \quad \text{استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

95 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2} \quad \text{ثم استنتج}$$

96 (1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$$

(2) استنتج النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \quad (ب) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \quad (ا)$$

97 باستعمال نهاية حصر دالتين ، عين النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x-1} , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+4(-1)^x}{x}$$

98 من أجل $x > 0$ ، قارن $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+5} - x$$

99 من أجل $x > 1$ ، قارن $\sqrt{2x^2-1}$ و $2x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2-1} - 3x$$

100 من أجل كل $x > 0$ ، قارن $\sqrt{2x^2+x+1}$ و $x\sqrt{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2+x+1} - x$$

101 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ثم} \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5 - الاستمرارية

102 ادرس استمرارية الدالة f عند x_0 في كل حالة من

الحالتين التاليتين :

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|} ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad (2)$$

103 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} ; x > 0 \\ f(x) = \frac{1-x^2}{x-2} ; x \leq 0 \end{cases}$$

بين لن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

104 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

عين قيمة العدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

105 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - a ; x > 2 \\ f(x) = \frac{2x^2 - a + b}{x} ; x \leq 2 \end{cases}$$

حيث a و b عدنان حقيقيان ثابتان .

عين علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2 .

6 - مبرهنة القيم المتوسطة - الدوال المستمرة والرتبية تماما

106 f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ بحيث

$$f(b) > b^2 \quad \text{و} \quad f(a) < ab$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a; b]$ بحيث

$$f(c) = bc$$

107 f دالة مستمرة على المجال $[0; 1]$ بحيث

$$f(1) = 1 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث

$$f(c) = \frac{1-c}{1+c}$$

108 f دالة مستمرة معرفة على المجال $I = [0;1]$

بحيث من أجل كل x من I ، $f(x) \in I$.

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من I بحيث

$$f(\alpha) = \alpha$$

109 في الشكل المقابل المنحني

(C) هو التمثيل البياني للدالة

$x \mapsto \cos x$ و (d) هو التمثيل

البياني للدالة $x \mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}x$

على المجال $I = [-\pi; 0]$.

(1) خمن عدد حلول المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ في

المجال I

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال I كما يلي :

$$f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

(أ) تحقق من أن الدالة f تقبل الاشتقاق على I و احسب $f'(x)$.

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) استنتج أن المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا واحدا

α في المجال I .

110 n عدد طبيعي غير معصوم .

(1) بين أن المعادلة $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ تقبل حلا

محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 .

(2) هل المعادلة $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا

كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل.

مسائل

111 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد $(O; I, J)$.

(1) أ) عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

(ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل

كل عدد حقيقي $x \neq 1$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f والمستقيم (d) الذي

معادلته $y = x - 2$ ؟ برر.

(ج) حدد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) ، لتكن A نقطة

تقاطع C_f و (d).

(3) ارسم C_f و (d) . (تؤخذ الوحدة 2cm على (Ox)

و 1cm على (Oy).

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على

المجال $]-\infty; 1[$. استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α .

(5) عين معادلة المماس للمنحني C_f الذي معامل توجيهه 1.

(6) ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث

m وسيط حقيقي.

(7) أ) نريد إيجاد نتيجة السؤال (5) باستعمال الحساب

بين أن فواصل نقط تقاطع المنحني C_f مع المستقيم الذي

معادلته $y = x + m$ هي حلول المعادلة (E) التالية:

$$(m+2)x^2 - (2m+7)x + m+4 = 0$$

(ب) جد حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

112 f هي الدالة المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

114 نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على المجموعة

$$]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$g(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{و}$$

و C_f و C_g تمثيلاهما البيانيين على الترتيب في معلم

متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

(ب) عين نهاية الدالة f عند $-\infty$. استنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً.

(ج) بين أن المستقيم $\Delta: y = 2x$ مقارب للمنحني C_f عند $+\infty$.

(2) أ) احسب $f(x) \times g(x)$ ثم استنتج نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$.

(ب) ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟

(ج) قارن بين $g(x) - 2x$ و $f(x)$.

استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - 2x$ ، أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة.

(3) نعتبر المنحني $(\Gamma) = C_f \cup C_g$.

بين أن معادلة (Γ) هي $y^2 - 2xy + 1 = 0$

(4) ليكن الشعاع $\vec{u}$ من المستوي حيث $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

نرمز بـ $(x; y)$ لاحتائتي النقطة M في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

و بـ $(x'; y')$ احتائياتها في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{u})$

(أ) عبر عن x و y بدلالة x' و y' .

(ب) عين معادلة (Γ) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{u})$.

(ج) ما طبيعة (Γ) ؟

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \text{بـ :}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

(1) بين أن الدالة f فردية

(2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

(3) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب

للمنحني (C) عند $+\infty$. حدد وضعية (C) بالنسبة لـ Δ

(4) باستعمال نتيجة السؤال (1) استنتج أن المنحني (C)

يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً عند $-\infty$. يطلب تعيين معادلة له.

(5) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على

$$]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[\quad \text{بـ :} \quad g(x) = -f(x)$$

• عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C') .

113 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ :

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

(1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

(ب) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

(2) أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها.

(ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) بين أن المستقيمين $\Delta: y = x + 1$ و

$\Delta': y = -x - 1$ مقاربين للمنحني (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

(ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال

$]1; +\infty[$ و ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على المجال $]-\infty; -1[$.

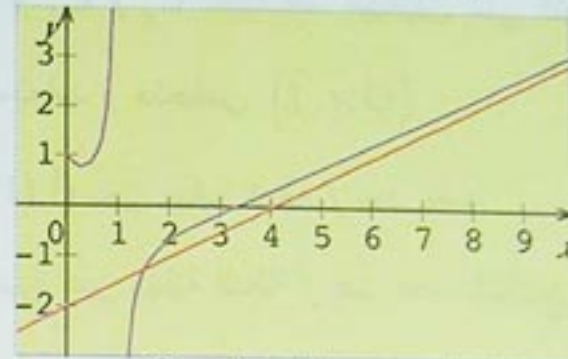
(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً واحداً α على

المجال $]-1; 1[$ ، أعط حصرأ لـ α سعته 10^{-1} .

اختيار من متعدد

115 عين الإجابة الصحيحة دون تبرير
في الشكل الموالي لدينا الرسم البياني C_f لدالة f معرفة على $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{2(x^2 - 1)}$$



- (1) المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب لـ C_f
(ب) المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب لـ C_f
(ج) C_f لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا ولا عموديا.
(2) من أجل كل من $]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{2}x + a + \frac{bx+c}{2(x^2-1)}$

(أ) $c = -3, b = 2, a = -2$

(ب) $c = -6, b = 4, a = -2$

(ج) $c = 3, b = 2, a = 1$

(3) C_f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته:

(أ) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (ب) $y = \frac{1}{2}x + 2$ (ج) $y = \frac{1}{2}x - 2$

(4) (أ) C_f يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

(ب) C_f يقطع المستقيم المقارب في النقطة $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$

(ج) C_f لا يقطع المستقيم المقارب في أية نقطة.

(5) على المجال $[0; 1[$ ، المعادلة $f(x) = 1$ تقبل:

(أ) حلا واحدا (ب) حلين متمايزين (ج) ثلاثة حلول.

116 f معرفة على $\mathbb{R} - \{5\}$ بـ: $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x - 5}$

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$

(3) من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{5\}$:

$$f(x) = 3x + 10 + \frac{50}{x - 5}$$

(4) المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 5$ و $y = 3x + 10$

مقاربان لمنحني الدالة f .

صحيح أم خاطئ

117 إليك جدول تغيرات دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	+	0	-
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$

نرمز بـ C_f إلى منحني الدالة f الممثل في معلم. أجب

بصحيح أو خاطئ على كل جملة من الجمل التالية:

(1) المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب لـ C_f .

(2) محور الترتيب مقارب لـ C_f .

(3) المستقيم الذي معادلته $y = 1$ يقطع C_f في نقطة واحدة.

(4) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين في المجال $]0; +\infty[$.

(5) على المجال $] -\infty; 0[$ ، $f(x) \leq 3$.

118 f دالة مستمرة ومتناقصة تماما على $[0; +\infty[$ ، إذن:

(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(ب) من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) < f(0)$

(ج) منحني الدالة f يقطع محور الفواصل على الأقل في

نقطة.

119 C_f هو المنحني الممثل لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في

معلم متعامد ومتجانس و Δ المستقيم الذي معادلته

$$y = 1 - x$$

(1) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $-\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

(2) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $+\infty$ فلا يوجد مستقيم مقارب

أفقي لـ C_f .

(3) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ فلا يمكن لـ Δ أن يكون

مقاربا لـ C_f .

(4) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $+\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = 1$

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 1$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi \sin x}{2x}\right) = 1$

الكفاءات المستهدفة

- ♦ توظيف المشتقات لحل مشكلات.
- ♦ استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة والمنحني الممثل لها (التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الانعطاف،...).
- ♦ حساب مشتق دالة مركبة.
- ♦ حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ ، $y'' = f(x)$. حيث f دالة مألوفة

يعبر التفاضل عن المعدل الذي تتغير به قيمة y نتيجة تغير قيمة x توجد بينهما علاقة رياضية أو دالة رياضية . وتعرف المشتقة بأنها ميل المماس لمنحني $f(x)$ عند أي نقطة بشرط وجود هذه المشتقة أو هي السرعة اللحظية أو معدل التغير اللحظي للدالة . نستخدم الرمز Δ للدلالة على التغير في الكمية . ويكون معدل التغير هو نهاية نسبة تغير y إلى نسبة تغير x : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. يمكن أن نكتب مشتق y بالنسبة لـ x : (ترميز لايبنتز) $\frac{dy}{dx}$ و هو المفضل عند الفيزيائيين .

يمكن التعبير عن المشتق بعدة طرق : $f'(x)$ ، $\frac{d}{dx} f(x)$ ، $\frac{df}{dx}$ ، $D_x f$ ، $\dot{x}$.



غوتفريد لايبنتز

1716 - 1646

غوتفريد فيلهيلم من لايبنتز (أيضاً لايبنتز) (1646 - 1716) فيلسوف ألماني.

علم طبيعي، علم رياضيات، ميتافيزيكي، مكتبي، ومطلي.

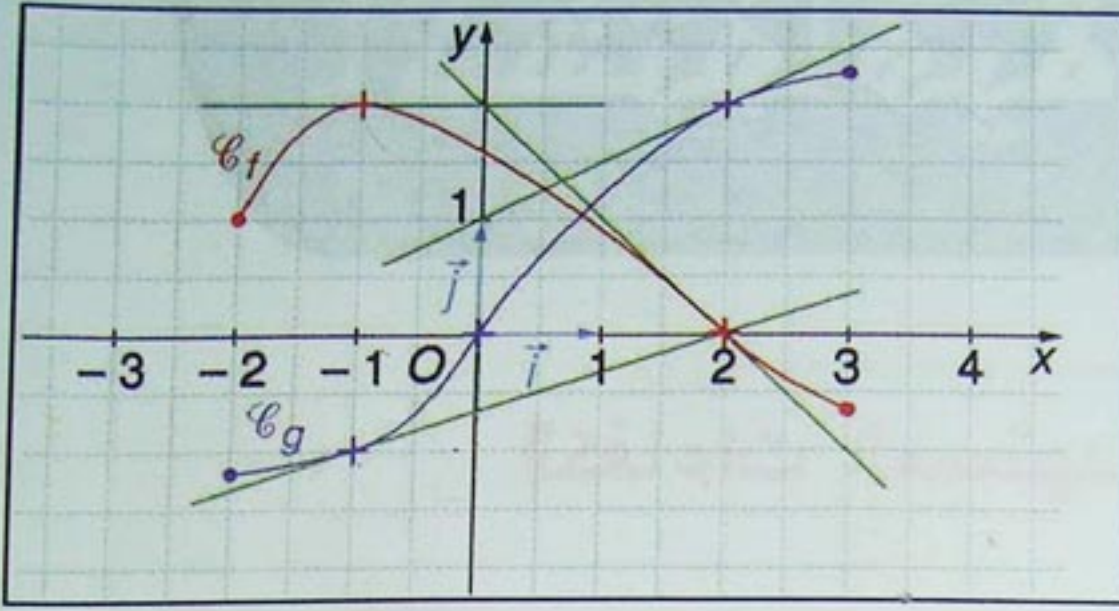
يرتبط اسم لايبنتز بالتعبير **دالة رياضية** (1694)، التي كان يصف بها كل

كمية متعلقة بـ **منحلي**، مثل ميل المنحني أو نقطة معينة على المنحني.

يعتبر لايبنتز مع نيوتن أحد مؤسسي علم التفاضل والتكامل وبخاصة تطوير

مفهوم التكامل وقاعدة الجداء، كما طور لمفهوم الحديث لمبدأ انحفاظ الطاقة.

نشاط أول



رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين لدالتين f و g معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2; 3]$ و بعض مماساتهما.

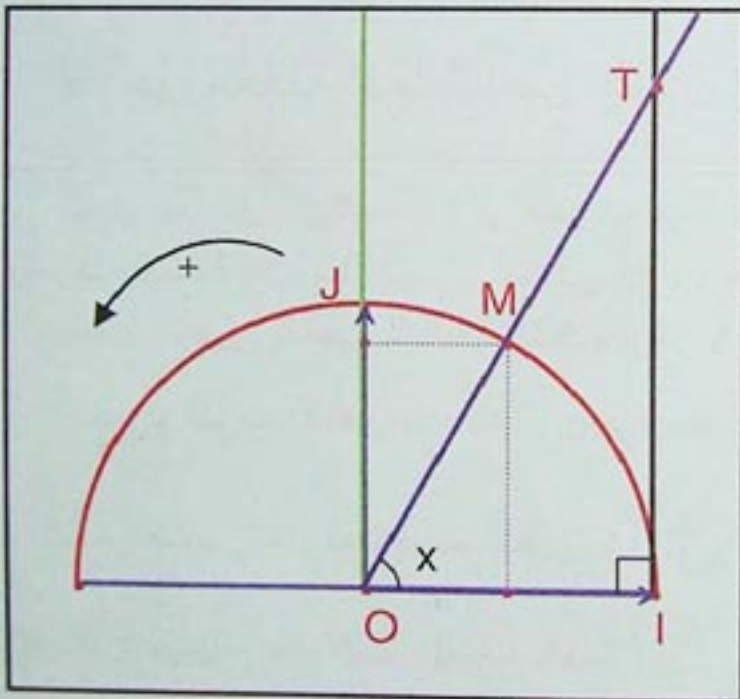
1. أحسب الأعداد المشتقة التالية:

$$\begin{aligned} & (f)'(-1) * (g)'(-1) * (f)'(2) * (g)'(2) * \\ & (f+g)'(-1) * (fg)'(2) * \left(\frac{3}{f}\right)'(-1) * \left(\frac{f}{g}\right)'(2) * \end{aligned}$$

2. من أجل كل x من المجال $[0; 2]$ نضع: $h(x) = f(2x - 1)$

أحسب $h'(0)$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)$.

نشاط ثان



(1) في الشكل المقابل، نقطة M من القوس $\widehat{IJ}$ لنصف الدائرة المركزية المرفقة بالمعلم $(O; I, J)$.

x قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ و لتكن النقطة T تقاطع المستقيم (OM) مع المستقيم العمودي على (OI) في I .

- ما هي القيم التي تأخذها x ؟
- ما هي قيم x التي يكون من أجلها $IT = 0$ ؟ $IT = 1$ ؟
- حدد القوس الذي يشمل النقطة M بحيث يكون $IT > 1$.
- عبر عن المسافة IT بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

- أحسب $f(0)$ ، $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
- باستعمال السؤال 1 أعط تفسيرا هندسيا لـ $f(x)$.
- بواسطة قراءة على الدائرة المثلثية ضع تخمينا حول اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- تحقق من صحة تخمينك باستعمال حاسبة بيانية.
- أحسب $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة المحصل عليها.

نشاط ثالث

u و v دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $[0; +\infty[$ على الترتيب بـ $u(x) = x^2 + x + 1$ و $v(x) = \sqrt{x}$

(1) تعيين الدالة المركبة $v \circ u$

لدينا المخطط التالي: $a \xrightarrow{u} b = u(a) \xrightarrow{v} v(b) = v \circ u(a)$

- بين أن الدالة $v \circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$.
- من أجل كل عدد حقيقي a ، عبر بدلالة a عن $v \circ u(a)$.

(2) حساب $u'(a)$ و $v'(b)$

- الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة v قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$. عين الدالتين u' و v' .
- أرسم و أتمم الجدول الموالي (تدور النتائج إلى 10^{-3}). يمكنك استعمال مجدول.

	A	B	C	D
1	a	b=u(a)	u'(a)	v'(b)
2	-2			
3	-1,5			
4	-1			
5	-0,5			
6	0			
7	0,5			
8	1			
9	1,5			
10	2			

(3) حساب $(v \circ u)'(a)$

- أنقل ثم باستعمال حاسبة بيانية أتمم الجدول الموالي: (تدور النتائج إلى 10^{-3})

a	$(v \circ u)'(a)$
-2	
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
2	

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(X^2+X+1)
\Y2=nDeriv(Y1,X,
X)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=

```

X	Y1	Y2
-2	1.7321	-.866
-1.5	1.3229	-.7559
-1	1	-.5
-.5	.86603	0
0	1	.5
.5	1.3229	.75593
1	1.7321	.86603

- خمن علاقة بين $u'(a)$ ، $v'(b)$ من جهة و $(v \circ u)'(a)$ من جهة ثانية.

الاشتقاقية

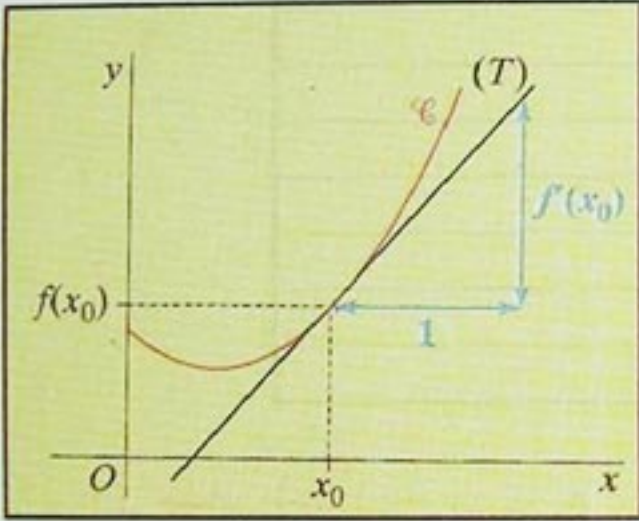
1. العدد المشتق - الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و a و $a+h$ عدنان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.
نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0.
تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

لدينا إذن: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و ذلك بوضع $x = a+h$

ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $f': x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

2. مماس منحنى دالة



تعريف و خاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O; I, J)$.
إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته:
 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

3. المشتقات المتتالية

تعريف: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.
إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة (f') تسمى المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f'' . إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة (f'') تسمى المشتقة الثالثة للدالة f و نرمز لها بالرمز f''' . تسمى الدوال $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}, \dots$ المشتقات المتتالية للدالة f .

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$

لدينا: $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، $f''(x) = 6x - \frac{2}{x^3}$ ، $f'''(x) = 6 + \frac{6}{x^4}$

4. الاشتقاقية و الاستمرارية

خاصية: إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال.

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا فمثلا الدالة: $x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للاشتقاق

عند 0. لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ بينما النسبة $\frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = -1$

تمرين محلول 1: أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية f ، g و k عند 1 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة

المحصل عليها: $k(x) = 2x|x-1|$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$

طريقة: لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a ندرس نهاية النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى 0.

حل: * $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{[(1+h)^2 - 2(1+h) + 3]^2 - 4}{h} = \frac{h^2(h^2+4)}{h}$ ومنه

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h(h^2+4) = 0$ إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1) = 0$.

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 و هو موازي لمحور الفواصل.

* من أجل لدينا: $\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ ومنه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = +\infty$

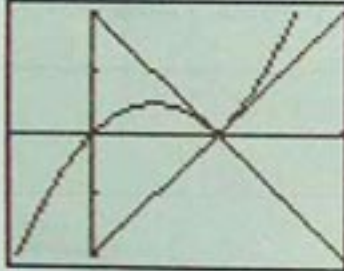
إذن الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 1. بما أن نهاية النسبة $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ هي $+\infty$

فإن معامل توجيه المستقيم (AM) حيث $A(1;0)$ و M نقطة من (C_g) فاصلتها $1+h$ يصبح كبيرا جدا لما يؤول h إلى 0 و هذا يعني أن (C_g) يقبل عند النقطة $A(1;0)$

مماسا موازيا لحامل محور الترتيب.

طريقة: إذا كانت نهاية النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى 0 غير منتهية فإن المنحني (C_f) يقبل عند

النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور الترتيب.



* من أجل $h > 0$ $\frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \frac{2(h+1)|h|}{h} = 2(h+1)$

و من أجل $h < 0$ $\frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \frac{2(h+1)|h|}{h} = -2(h+1)$

لاحظ أن هذه النسبة تقبل نهاية من اليمين عند 0 مساوية لـ 2 و نهاية من اليسار عند 0 مساوية لـ -2.

نقول أن k تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين و من اليسار و أن عددها المشتق من اليمين عند 1 هو 2 و عددها المشتق من

اليسار عند 1 هو -2 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1 (النسبة $\frac{k(1+h)-k(1)}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0).

المنحني (C_k) يقبل عند النقطة $A(1;0)$ نصفين مماسين معاملتا توجيههما 2 و -2.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C_f) و (Δ) مماس (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة (-2).

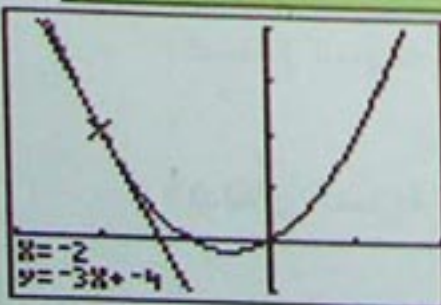
2. عين معادلة لـ (Δ) .

حل

1. أنظر الشكل المقابل.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x) = 2x + 1$ و منه $f'(-2) = -3$

بتطبيق الدستور: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ مع $a = -2$ نجد $y = -3x - 4$



المشتقات و العمليات

1. مشتقات دوال مألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

2. المشتقات والعمليات على الدوال

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تتعدم على I)
المشتقة	$u' + v'$	ku'	$u'v + v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

نتائج:

* الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

* الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوي في مجموعة تعريفها.

3. مشتقة الدالة: $x \mapsto u(ax+b)$

مبرهنة: a و b عدنان حقيقيان مع $a \neq 0$. u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I .

الدالة $f: x \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J و لدينا: $f'(x) = au'(ax+b)$

أمثلة:

* الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f'(x) = a \cos(ax+b)$$

* الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \cos(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$g'(x) = -a \sin(ax+b)$$

تمرين محلول 1: عين مشتقة كل دالة من الدوال التالية المعرفة على $I =]0; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = (x+1)\sqrt{x}, \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - x + 3$$

طريقة: لحساب مشتقة دالة نقوم أولا بالتعرف على شكلها.

حل:

* الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود و منه فهي قابلة للاشتقاق على I و لدينا:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$$

* الدالة g قابلة للاشتقاق على I لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على I و لدينا:

$$g'(x) = \sqrt{x} + (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$$

* الدالة h هي حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بما أن الدالة المقام $x \mapsto x$ لا تتعدم على I

فإن الدالة h تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$h'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

تمرين محلول 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = f(-x)$ و $h(x) = f(2x-1)$ بدون تعيين الدالتين g و h عين الدالتين g' و h' .

حل:

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و منه فالدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$g'(x) = -f'(-x) = -\frac{1}{(-x)^2 + (-x) + 1} = -\frac{1}{x^2 - x + 1}$$

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $(2x-1)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و منه فالدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$h'(x) = 2f'(2x-1) = 2 \times \frac{1}{(2x-1)^2 + (2x-1) + 1} = -\frac{2}{4x^2 - 2x + 1}$$

تمرين محلول 3: من أجل $x \geq 0$ و n عدد طبيعي نضع $f_n(x) = x^n \sqrt{x}$

بين أن الدالة f_n تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ثم عبر عن $f'_{n+1}(x)$ بدلالة n و $f_n(x)$.

حل: الدالة $x \mapsto x^n$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بينما الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ و منه

فالدالة f_n جداءهما تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$.

$$\text{لدينا: } f_{n+1}(x) = x^{n+1} \sqrt{x} \quad \text{و منه} \quad f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n \sqrt{x} + x^{n+1} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{و بالتالي} \quad f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^n \sqrt{x} = \left(n + \frac{3}{2}\right)x^n \sqrt{x}$$

$$\text{و نجد هكذا: } f'_{n+1}(x) = \left(n + \frac{3}{2}\right)f_n(x)$$

١. اتجاه تغير دالة

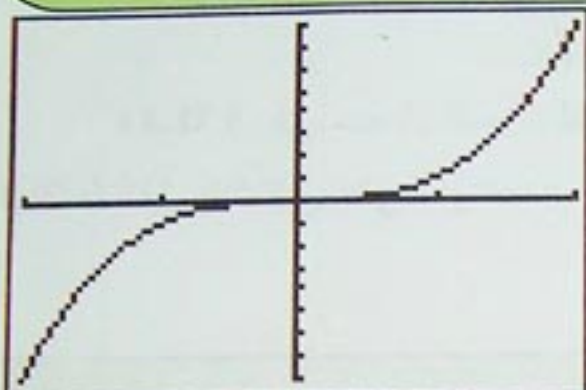
1. المشتقة و اتجاه تغير دالة

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$ ، ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماماً على I .

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) < 0$ ، ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماماً على I .

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) = 0$ ، فإن الدالة f ثابتة على I .



ملاحظة: لنكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = 3x^2$ و $f'(x) = 0$ منه:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$

إذن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

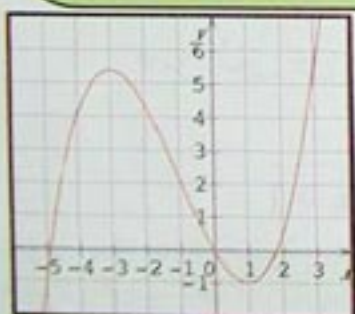
2. القيم الحدية المحلية

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \leq f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \geq f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.



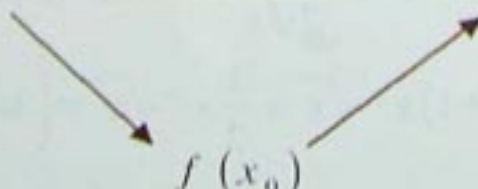
مثال: لنكن f الدالة المعرفة على $[-6; 4]$ بـ $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 3x^2 - 9x)$

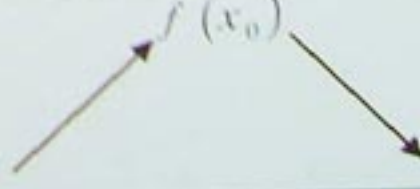
و لنكن في الشكل المقابل تمثيلها البياني. $f(-3) = \frac{27}{5}$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

و $f(1) = -1$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f .

مبرهنة (دون برهان): f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f .

x	x_0		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

x	x_0		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

تمرين محلول 1: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

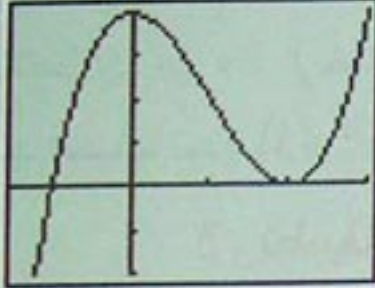
- أدرس اتجاه تغير f . أحسب $f(-1)$. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارتها على $\mathbb{R}$.
- باستعمال السؤال 1 أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty; 0[$ بـ $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{4}{x}$

حل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. كثير حدود من الدرجة

الثانية جذراه 0 و 2 و بالتالي فإشارته من نفس إشارة (-3) بين الجذرين أي سالبة على المجال $[0; 2]$

لدينا: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = 0$



x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	+	-	+
$f(x)$		↗ 0	↗ 4	↘ 0	↗

من جدول التغيرات نستنتج أن $f(x) \leq 0$ على $]-\infty; -1]$ و $f(x) \geq 0$ على $[-1; +\infty[$.

2. الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 0[$ ولدينا: $g'(x) = x - 3 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$

إذن إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $f(x)$ على $]-\infty; 0[$ أي سالبة على $]-\infty; -1]$ و موجبة على $[-1; 0[$.
نستنتج هكذا أن الدالة g متناقصة تماماً على $]-\infty; -1]$ و متزايدة تماماً على $[-1; 0[$.

تمرين محلول 2: بدراسة اتجاه تغير دالة f مختارة بشكل مناسب قارن بين العددين:

$$A = 0,999998 + \frac{1}{0,999998} \quad \text{و} \quad B = 0,999999 + \frac{1}{0,999999}$$

حل: نعتبر الدالة f المعرفة مثلاً على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

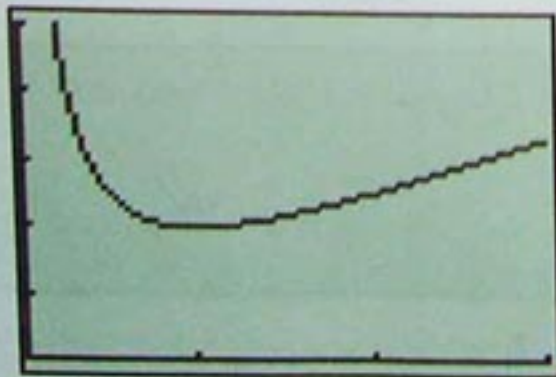
الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ و بالتالي فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(x^2 - 1)$ الذي يقبل جذرين هما (-1) و 1 و منه

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	-	+

نستنتج هكذا أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $[0; 1]$ و متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$

نلاحظ أن $A = f(0,999998)$ و $B = f(0,999999)$

و بما أن العددين $0,999998$ و $0,999999$ ينتميان إلى المجال $[0; 1]$
مع $0,999998 < 0,999999$ فإن $f(0,999998) > f(0,999999)$
و هكذا فإن $A > B$



اشتقاق دالة مركبة

1. مشتقة الدالة $v \circ u$

مبرهنة (دون برهان): إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I :

$$(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$$

مثال: لنكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2(x^2 + 3)^2 + 1$

نلاحظ أن $f = v \circ u$ حيث $u: x \mapsto x^2 + 3$ و $v: x \mapsto 2x^2 + 1$ و منه $f'(x) = v'(x^2 + 3) \times u'(x)$

بعد الحساب نجد: $f'(x) = 4(x^2 + 3) \times 2x = 8x(x^2 + 3)$

2. تطبيقات

• مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق

$$\text{على } I \text{ و لدينا: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

البرهان: نضع $f = \sqrt{u}$ و منه $f = v \circ u$ حيث $v: x \mapsto \sqrt{x}$

الدالة v تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ و لدينا $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ بما أن من أجل كل x من I ، $u(x) > 0$ فإن f تقبل

$$\text{الاشتقاق على } I \text{ و لدينا: } f' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

• مشتقة الدالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$(u^n)' = nu' u^{n-1}$$

البرهان: نضع $f = u^n$ و منه $f = v \circ u$ حيث $v: x \mapsto x^n$

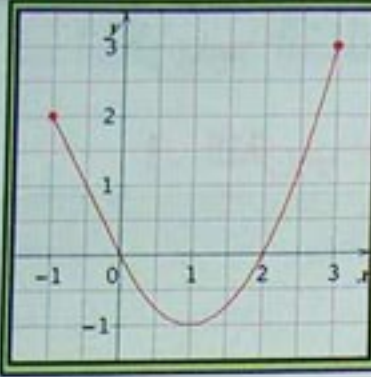
الدالة v ($n \geq 2$) تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $v'(x) = nx^{n-1}$ إذن الدالة f تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$f' = nu^{n-1} \times u' = nu' u^{n-1}$$

• مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$ (عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I

$$\text{و لدينا: } \left(\frac{1}{u^n} \right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$



تمرين محلول 1: التمثيل البياني المقابل هو لدالة g قابلة للاشتقاق على $[-1; 3]$

1. عين بيانيا إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g'(x)$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; 3]$ بـ $f(x) = [g(x)]^2$.

أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

حل:

1. نلاحظ أن منحنى الدالة g يقع فوق محور الفواصل من أجل $x \in [-1; 0] \cup [2; 3]$ و تحته من أجل $x \in [0; 2]$.

و منه $g(x) \geq 0$ من أجل $x \in [-1; 0] \cup [2; 3]$ و $g(x) \leq 0$ من أجل $x \in [0; 2]$.

بما أن الدالة g متناقصة تماما على $[-1; 1]$ و متزايدة تماما على $[1; 3]$ و تقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة 1 فإن $g'(x) < 0$ من أجل $x \in [-1; 1]$ و $g'(x) > 0$ من أجل $x \in [1; 3]$ و $g'(1) = 0$.

2. الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1; 3]$ و منه فالدالة $f = g^2$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1; 3]$

و لدينا: $f'(x) = 2g'(x)g(x)$. باستعمال الجدول الموالي نحصل على إشارة $f'(x)$

x	-1	0	1	2	3	
$g(x)$	+	0	-	-	0	+
$g'(x)$	-	-	0	+	+	
$f'(x)$	-	0	+	0	0	+

تمرين محلول 2: عين مشتقات الدوال الآتية:

2. $g: x \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)^3}$ على $]1; +\infty[$.

1. $f: x \mapsto (2x^2 - x + 3)^4$ على $\mathbb{R}$.

3. $h: x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ على $]2; +\infty[$.

حل:

1. نلاحظ أن $f = u^4$ مع $u(x) = 2x^2 - x + 3$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $u'(x) = 4x - 1$.

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f' = 4u^3 u'$ و منه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4(4x - 1)(2x^2 - x + 3)^3$.

2. نلاحظ أن $g = \frac{1}{u^3}$ مع $u(x) = x^2 - 1$ كما أن $u(x) \neq 0$ من أجل $x \in]1; +\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق

على $]1; +\infty[$ و لدينا $u'(x) = 2x$. إذن g قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ و لدينا $g' = -\frac{3u'}{u^4}$ و منه من أجل

$$g'(x) = -\frac{3(2x)}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{6x}{(x^2 - 1)^4}, \text{ كل } x \in \mathbb{R}.$$

3. نلاحظ أن $h = \sqrt{u}$ مع $u(x) = x^2 - 4$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]2; +\infty[$ مع $u(x) > 0$. إذن h قابلة

للاشتقاق على $]2; +\infty[$ و لدينا $h' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ و منه من أجل كل $x \in]2; +\infty[$, $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

لـ التقريب التآلفي - طريقة أولر

1. التقريب التآلفي

خاصية: f دالة معرفة على مجال مفتوح I .

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I

لدينا: $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ مع $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$

يسمى $f(x) + hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f .

البرهان: ليكن x من I ، من المعطيات لدينا f قابلة للاشتقاق عند x ومنه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

بوضع $\varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ يكون لدينا $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = f'(x) - f'(x) = 0$

إذن $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varepsilon(h) + f'(x)$ ومنه $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\varepsilon(h)$

الكتابة التفاضلية: بوضع: $\Delta x = (x+h) - x$ و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ نكتب المساواة

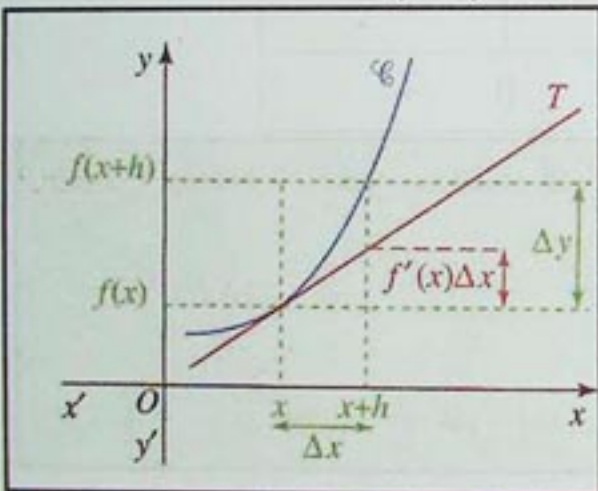
$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x) \quad \text{كما يلي:} \quad f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\varepsilon(h)$$

ومن التقريب $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0.

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dx$

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية و بصفة عامة نكتب: $\frac{df}{dx}$ بدلا من f'

و $\frac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' وهكذا $\frac{d^n f}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$.



2. طريقة أولر

تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و $y_0 = f(x_0)$. تركز هذه الطريقة على التقريب

التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا: $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$

انطلاقا من النقطة $A_0(x_0; y_0)$ بحيث $f'(x_0) \neq 0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1; y_1)$ ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ و التي

تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ و المار من A_0 و بالتالي:

$$y_1 = f(x_0) + hf'(x_0) \quad \text{و بما أن} \quad f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

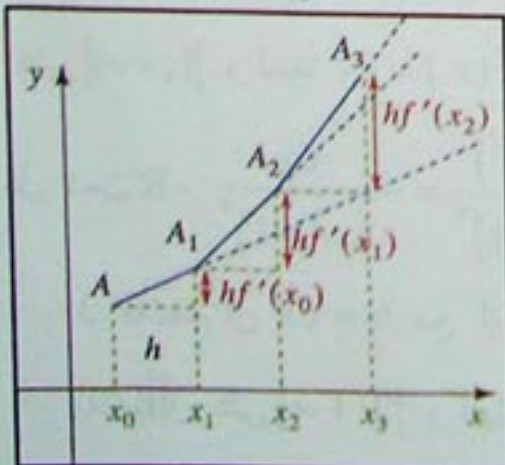
من أجل h قريب من 0 فإن النقطة $A_1(x_1; y_1)$ قريبة من (C_f) منحنى f .

بنفس الطريقة يمكن إنشاء، انطلاقا من A_1 ، النقطة $A_2(x_1+h; f(x_1) + hf'(x_1))$

و هكذا يمكن على التوالي إنشاء النقط $A_n(x_n; y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$

و $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$. يربط النقط $A_0, A_1, A_2, \dots$ نحصل

على تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة. و نحصل على أكثر دقة كلما كان h أقربا إلى 0.



تمرين محلول 1: كرة حديدية نصف قطرها 8cm تتمدد عند ارتفاع درجة الحرارة.

1. ما هو تغير حجمها لما يرتفع نصف قطرها بـ 1mm ؟

2. ما هو تغير مساحتها في نفس الظروف ؟

حل:

1. ليكن V حجم الكرة بـ cm^3 و ليكن R نصف قطرها بـ cm . لنعين ΔV تغير حجم الكرة الحاصل بسبب

$$\Delta R = 0,1 \text{ تغير نصف القطر في حالة } R = 8cm. \text{ لدينا: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ و منه } \frac{dV}{dR} = \frac{4}{3}\pi(3R^2) = 4\pi R^2$$

أي $dV = 4\pi R^2 dR$ و بما أن $\Delta R = 0,1$ (قريب من 0) يمكننا أن نكتب $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$

و هكذا نجد: $\Delta V = 4\pi(8)^2(0,1) \approx 80$ و منه يرتفع الحجم بحوالي $80cm^3$.

2. لنكن S مساحة الكرة بـ cm^2 و منه $S = 4\pi R^2$ و بالتالي $dS = 8\pi R dR$ يمكننا أن نكتب

$\Delta S = 8\pi R \Delta R$ من أجل $\Delta R \approx 0$ و هكذا $\Delta S \approx 20$. نرتفع المساحة بحوالي $20cm^2$.

تمرين محلول 2: لتكن f دالة تحقق: $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{x}$.

1. باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0,5$ شكل جدولاً يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x

ينتمي إلى $[0;5]$ ثم أنشئ تمثيلاً تقريبياً للدالة f . تدور النتائج إلى 0,01. عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.

2. باختيار خطوة جديدة $h=0,1$ عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.

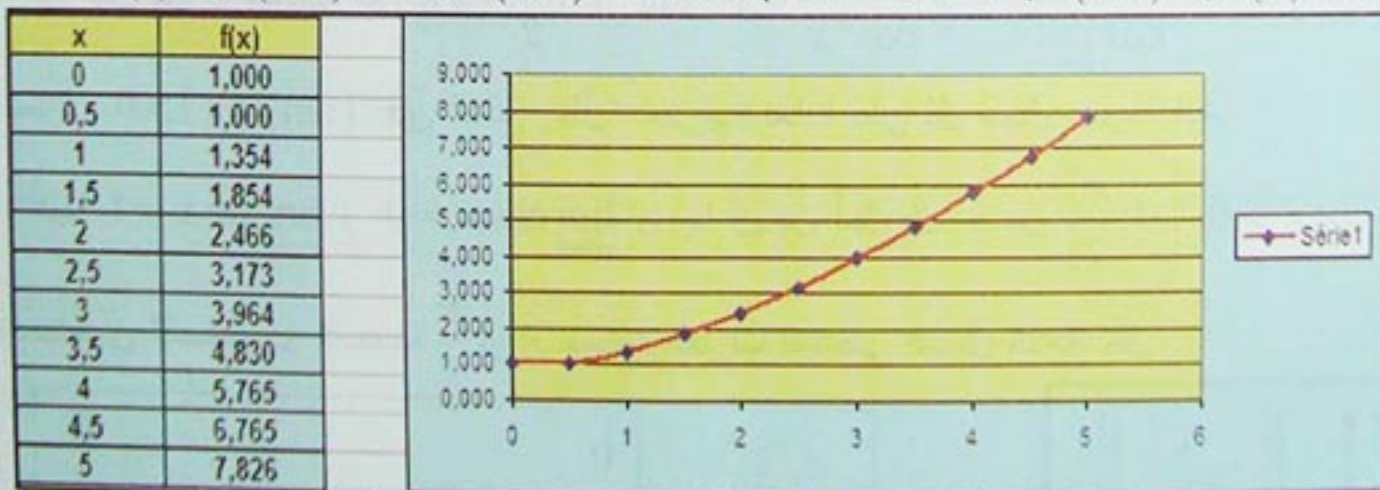
3. نبهن أن $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 1$. تحقق أن $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{x}$. أحسب $f(4)$ ثم قارن النتيجة

مع القيم المقربة المحصل عليها سابقاً بالخطوتين 0,5 و 0,1.

طريقة: لإيجاد قيمة مقربة لـ $f(a+h)$ نستعمل التقريب $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ حيث h قريب من 0.

حل:

1. لدينا: $f(0,5) \approx f(0) + 0,5f'(0) \approx 1$, $f(1) \approx f(0,5) + 0,5f'(0,5) \approx 1 + 0,5\sqrt{0,5} \approx 1,354$



لدينا $f(4) \approx 5,765$

2. نجد باستعمال مجدول أو برنامج حاسبة بيانية $f(4) \approx 6,227$.

3. من الواضح أن $f(0)=1$ كما أن $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{x} = \sqrt{x}$

لدينا $f(4) = \frac{2}{3} \times 4\sqrt{4} + 1 = \frac{19}{3}$ و باستعمال حاسبة نجد $f(4) \approx 6,333$. نلاحظ أن القيمة المقربة المحصل عليها

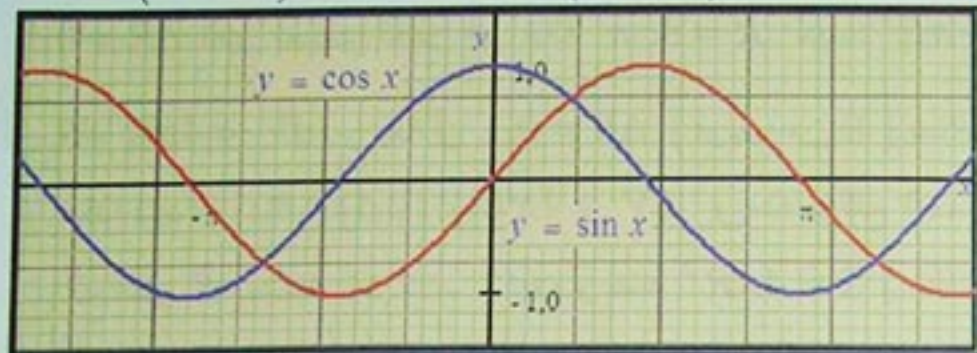
بالخطوة 0,1 أقرب من القيمة المضبوطة لـ $f(4)$ من القيمة المقربة المحصل عليها بالخطوة 0,5.

١. دراسة دالة مثلثية

1. تذكير حول الدالتين "جيب" و "جيب التمام"

* الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ معرفتان على $\mathbb{R}$.

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $x + 2\pi$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ولدينا $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ و $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.



نقول أن الدالتين $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$

دوريتان دورهما 2π .

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\cos(-x) = \cos x$ و

$\sin(-x) = -\sin x$

2. الدالة "ظل"

تعريف: الدالة "ظل" و التي نرمز إليها بالرمز "tan" معرفة بـ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل عدد حقيقي x

يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح ($k \in \mathbb{Z}$).

خواص: * من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $\tan(x + \pi) = \tan x$. إذن الدالة "ظل" دورية دورها π .

* من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $\tan(-x) = -\tan x$. إذن المنحني الممثل للدالة "ظل" متناظر

بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

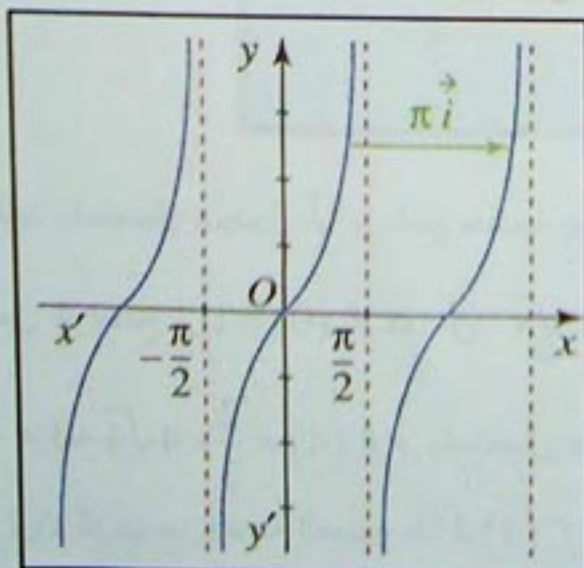
دراسة الدالة "ظل": * من الخاصيتين السابقتين يمكن اقتصار دراسة الدالة "ظل" على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

* من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

بما أن $(\tan)'(x) > 0$ فإن الدالة "ظل" متزايدة تماماً على كل مجال معرفة فيه.

* لدينا $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0$ و بما أن من أجل كل x من $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، $\cos x > 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة "ظل".



x	0	$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$		+
$\tan(x)$	0	$+\infty$

تمرين محلول: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin^2 x$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن الدالة f دورية دورها π و أن محور الترتيب محور تناظر للمنحنى (C) .
2. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. أرسم المنحنى (C) على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ثم على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

حل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$ ، ومنه الدالة f

دورية دورها π .

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(-x) = \sin^2(-x) = [\sin(-x)]^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$ ، ومنه الدالة f زوجية و بالتالي فإن محور الترتيب محور تناظر للمنحنى (C) .

2. بما أن الدالة $\sin x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (جاء دالتين) فهي إذن

قابلة للاشتقاق على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ولدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = 2 \sin x \cos x$.

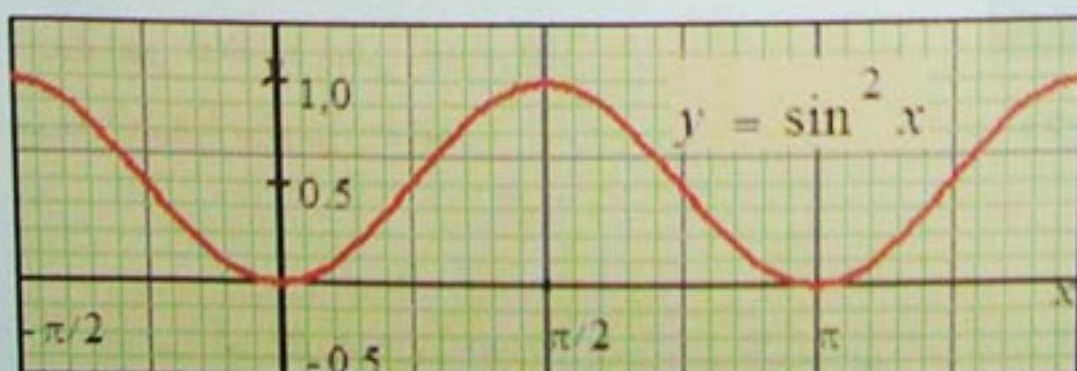
و بما أن العددين $\sin x$ و $\cos x$ موجبان على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ مع $\sin 0 = 0$ و $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ فإن $f'(x) \geq 0$ على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ و بالتالي فالدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	1

3. نرسم في البداية المنحنى الممثل للدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ثم باستعمال التناظر بالنسبة إلى محور الترتيب

نرسم المنحنى على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ و بما أن الدالة f دورية دورها π نقوم بانسحاب شعاعه $\pi \vec{i}$ لرسم المنحنى (C) على

المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.



ملاحظة: لرسم (C)

على $\mathbb{R}$ نجري انسحابات متتالية أشعتها $k\pi \vec{i}$ حيث k عدد صحيح (من $\mathbb{Z}$)

المقارنة بين دوال وتعيين الأوضاع النسبية لمنحنياتها

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0; \pi]$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ و $g(x) = \sin x$

و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. مماس مشترك

بين أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة O يطلب تعيين معادلة له.

2. دراسة الأوضاع النسبية للمنحنيات (C_f) و (C_g) و (T)

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0; \pi]$ بـ $u(x) = \sin x - x$

- أدرس اتجاه تغير الدالة u
- استنتج إشارة $u(x)$ على $[0; \pi]$ محددا وضعية المنحني (C_g) بالنسبة للمماس (T) .

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0; \pi]$ بـ $v(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

- أحسب $v'(x)$ ثم $v''(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0; \pi]$.
- عين إشارة $v''(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة v' .
- عين إشارة $v'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة v .
- حدد إشارة $v(x)$.

• بين أنه من أجل كل x من $[0; \pi]$ ، $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

• حدد الأوضاع النسبية للمنحنيات (C_f) ، (C_g) و (T) .

• أنشئ في نفس المعلم $(O; I, J)$ المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (T) .

تطبيق 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f' على $\mathbb{R}$.
- استنتج تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

• قارن بين الدالتين $u: x \mapsto \cos x$ و $v: x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$

تطبيق 2: نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ

$$f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx \quad \text{حيث } n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f_n على $[0, +\infty[$.
- أثبت صحة "متباينة برنولي" التالية:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } [0, +\infty[\text{ و من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

طريقة

عندما يتعذر إيجاد إشارة المشتقة مباشرة يمكن دراسة تغيرات الدالة المشتقة لتحديد إشارتها.



1705/8/16 – 1654/12/21

جاكوب برنولي

دراسة دالة صماء

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

• أدرس اتجاه تغير الدالة g .

• بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه. استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

نعتبر المستقيمين $(D): y = -3x$ و $(D'): y = x$

• أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

• بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. استنتج جدول تغيرات الدالة f .

• أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.

• بين أن المستقيم (D') مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

• أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) و (D') . أرسم (C_f) ، (D) و (D') .

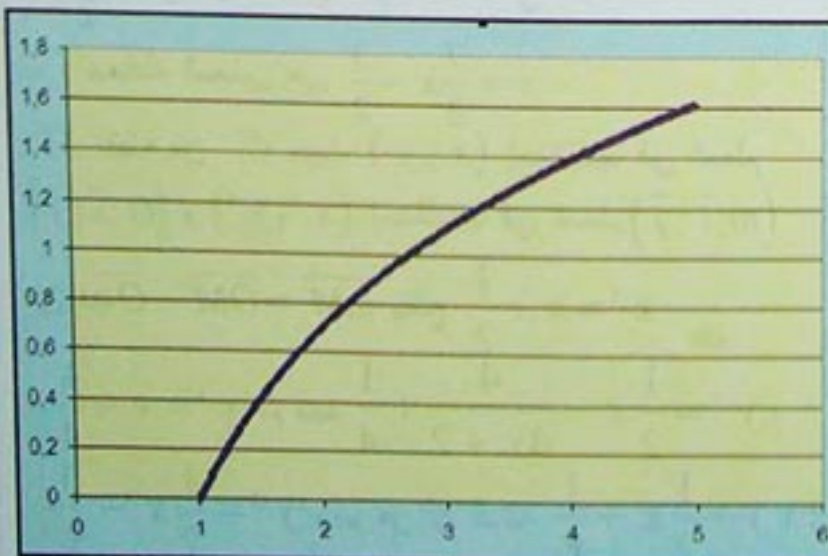
تقريب دالة بواسطة جدول أو حاسبة بيانية

لتكن f دالة تحقق $f(1) = 0$ و من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1}{x}$

1. بإتباع "طريقة أولر" أنجز ورقة الحساب الموالية باختيار خطوة $h = 0,01$ ثم أكمل الجدول التالي:

x	قيمة مقربة لـ $f(x)$
1	0
1,01	0,01
1,02	0,01990099
1,03	0,029704912
1,04	0,03941365
1,05	0,049029034
1,06	0,058552844
1,07	0,067986806
1,08	0,0773326
1,09	0,08659186
1,1	0,095766172
1,11	0,104857081
1,12	0,11386609
1,13	0,122794661
1,14	0,131644219

x	$f(x) \approx$
2	0,695653
3	
4	
5	



2. أنشئ تقريبا لمنحني الدالة f على المجال $[1; 5]$.

3. أعد إنجاز نفس الجدول السابق باختيار خطوة

$h = 0,001$. قارن بين النتائج المحصل عليها مع تلك

التي تقدمها الحاسبة باستعمال اللمسة **LN**

موضوع محلول

تمرين :

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = ax + \frac{b}{4x+2}$ مع a و b عددين حقيقيين.

1. أ- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من المجموعة D_f .

ج- عين العددين a و b بحيث من أجل كل $x \in D_f$ ،

$$f'(0) = \frac{7}{2} \text{ و } f(0) = -\frac{3}{2}$$

2. أ- أحسب النهايات عند حدود المجموعة D_f .

ب- برر أنه من أجل كل $x \in D_f$ ، $f'(x) > 0$.

ج- أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3. نسمي المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ- برهن أن المستقيم ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ هو مستقيم

مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$.

ب- أكتب معادلة مماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- برهن أن النقطة ω ذات الإحداثيين $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$

هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}_f$. أرسم المنحني $\mathcal{C}_f$.

تعاليق

استعمال المبرهنة حول مشتق مجموع دالتين .

للحصول على النتائج نطبق المبرهنات على النهايات .

ب- لدينا من أجل كل $x \in D_f$ ، $4x+2 \neq 0$ إذن الدالة الناطقة $x \mapsto \frac{b}{4x+2}$ تقبل

الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ؛ الدالة كثير حدود $x \mapsto ax$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ولدينا مجموع هاتين الدالتين هو الدالة f ؛

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f .

$$\text{ج- } f'(x) = a - \frac{4b}{(4x+2)^2} ; f'(0) = \frac{7}{2} \text{ معناه } a - b = \frac{7}{2}$$

$$f(0) = -\frac{3}{2} \text{ معناه } \frac{b}{2} = -\frac{3}{2} \text{ وبالتالي نجد } b = -3 \text{ و } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{2. أ- } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$$

$$\text{ب- } f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{12}{(4x+2)^2} \text{ مجموع عددين موجبين}$$

لأنما إذن من أجل كل $x \in D_f$ ، $f'(x) > 0$.

$$\text{3. أ- } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty \text{ إذن المستقيم ذي المعادلة}$$

$$y = \frac{1}{2}x \text{ هو مستقيم مقارب للمنحني } \mathcal{C}_f.$$

$$\text{ب- معادلة المماس هي } y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$$

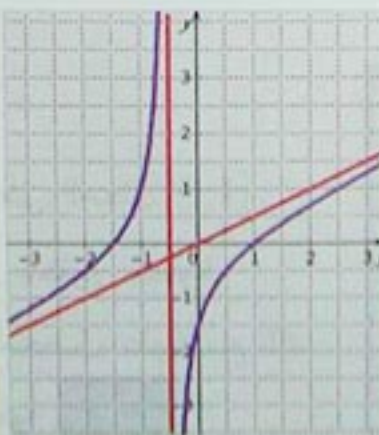
نقطة M من $\mathcal{C}_f$ حيث $(x; y)$ إحداثيتها في المعلم

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ و $(x'; y')$ إحداثيتها في المعلم $(\omega; \vec{i}; \vec{j})$

$$\text{من } \overline{\omega M} = \overline{OM} - \overline{O\omega} \text{ ينتج } x' = x + \frac{1}{2}$$

$$\text{و } y' = y + \frac{1}{4} \text{ ثم نجد } y' = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{4x'}$$

$$y' = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{x'} \text{ ونبرهن أن الدالة } g: x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} \text{ هي فردية .}$$



تطبيق مباشر للمعادلة المعروفة

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

مع العلم أن المعاملات أعطيت في 1.

ج-

استعملنا طريقة تغيير المعلم من المبدأ

O إلى المبدأ ω ؛ يمكن استعمال

طرق أخرى

تنبيه

تمارين الإستمثال (التوسع إلى أبعد حد) يطلب فيها تعيين القيم المثلى (العظمى أو الصغرى) وهذا يؤدي بنا إلى إنشاء دالة نستخرج من دراستها القيم الحدية حسب المطلوب .

نستفيد من الاستمثال في الحياة الاقتصادية (مثل شراء كمية كبيرة من البضائع بأقل ثمن) . نريد في الموضوع المقترح استخراج روافد خشبية من جذع شجرة بدون تبذير .

تمرين (بكالوريا)

من جذع شجرة دائري المقطع قطره D ، نريد الحصول على رافد مستطيل المقطع قاعدته x وارتفاعه h . نحصل على المقاومة القصوى (العظمى) في الانحناء كلما كان المقدار x/h^2 كبيرا مع $h > x$.



(I) f هي الدالة المعرفة على المجال $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ بـ : $f(x) = -x^3 + \frac{9}{4}x$.

$\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2$ و $\|\vec{j}\| = 1$ (وحدة الطول هي 1cm)

1. أحسب $f'(x)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة f .
2. أكتب معادلة t_1 مماس المنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة O ثم معادلة t_2 مماس المنحني $\mathcal{C}$ عند نقطته A ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ ؛ ثم أدرس على المجال $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ الوضعية النسبية للمنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة لـ t_1 وبالنسبة لـ t_2 .
3. أنشئ المماسين t_1 و t_2 ثم المنحني $\mathcal{C}$.

(II) تطبيق : نضع $D = 1,5m$. D هو قطر المقطع الدائري لجذع الشجرة).

1. اشرح لماذا $x^2 + h^2 = \frac{9}{4}$.
2. أحسب x/h^2 بدلالة x .
3. استعمل الجزء (I) لإيجاد x و h بحيث تكون للرافد أقصى مقاومة للانحناء .

توجيهات

- (I) 1. حل $f'(x)$ إلى جداء عاملين ثم استنتج إشارته بسهولة .
2. طبق مباشرة معادلة المماس ولدراسة الوضعية ، أدرس إشارة العبارة $f(x) - t(x)$ حيث $y = t(x)$ هي معادلة للمماس .
- (II) 1. استعمل مبرهنة فيثاغورس لإيجاد العلاقة بين x ، h و D .
2. استخرج h^2 من العلاقة السابقة ثم قم بتعويضها تحصل على $xh^2 = f(x)$.
3. استعمل جدول تغيرات الدالة f لتعيين القيمة الحدية العظمى .

1 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

أ- تحقق أنه من أجل كل h غير معدوم يكون :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}$$

ب- استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 مبينا $f'(1)$ (أنظر التمرين المحلول 1)

2 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x|$

أثبت أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

3 دالة قابلة للاشتقاق عند -1 حيث $f'(-1) = 2$

علما أن المنحني الممثل في معلم ، للدالة f ، يمر بالنقطة $A(-1; -3)$

أكتب معادلة لمماس هذا المنحني عند النقطة A .

4 ليكن $\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عند 0 .

المستقيم T ذو المعادلة $y = 2 - 3x$ ، هو المماس للمنحني

$\mathcal{C}_f$ عند النقطة $A(0; 2)$

1 حدد $f(0)$ و $f'(0)$

2 فسر هندسيا العدد $\frac{f(x) - 2}{x}$ من أجل $x \neq 0$.

3 برر وجود $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$

5 إليك التمثيل البياني لدالة f ،

T_1 و T_2 مماسان له .

1 حدد القيم التالية : $f(0)$ ، $f(1)$ ،

$f'(0)$ ، $f'(1)$



2 أكتب معادلة لكل من المستقيمين T_1 و T_2 .

6 التمثيل البياني لدالة f يشمل النقطة $A(-2; 3)$

T المماس للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة A والموازي للمستقيم

ذو المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$.

أكتب معادلة للمستقيم T .

7 $\mathcal{C}_f$ منحني الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x^2 + |x - 1|$$

1 أثبت أنه من أجل $h \neq 0$ لدينا :

$$\frac{f(1+h) - 1}{h} = h + 2 + \frac{|h|}{h}$$

2 هل العبارة $\frac{f(1+h) - 1}{h}$ تقبل نهاية عندما h يؤول إلى 0 ؟

3 أعط تفسيرا هندسيا للجواب عن السؤال 2 ؛ ثم أكتب معادلتني نصفى المماسين للمنحني $\mathcal{C}_f$ في هذه الحالة .

8 الدالة المعرفة على $[-2; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x + 2}$$

1 أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h)}{h}$

2 هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين -2 ؟

فسر هندسيا إجابتك .

9 I مجال من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a ، و f دالة

قابلة للاشتقاق عند a حيث $f'(a) = l$ مع $l \in \mathbb{R}$.

نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

إذا كان $x \in I - \{a\}$ و $g(a) = l$

أ- أثبت أن الدالة g مستمرة عند a .

ب- من أجل $x \in I - \{a\}$ ، أكتب $f(x)$ بدلالة x

و $g(x)$.

ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. ماذا تستنتج ؟

10 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بـ :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

1 برهن أنه من أجل $h \neq 0$ ،

$$\frac{f(1+h) - 2}{h} = \frac{h^2 + 3h + 3}{(1+h)\sqrt{1+h} + 1} - 2 + 2h$$

2 بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 .

3 استنتج أن الدالة f مستمرة عند 1 .

11 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = 3x + |x^2 - 4|$$

1 تحقق من أن الدالة f مستمرة عند -2 .

2 برهن أنه من أجل $h \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right]$ ،

17 أ - $D = \mathbb{R} ; f(x) = (2x+4)^5 - 1$

ب - $D = [4; +\infty[; f(x) = \sqrt{x-4}$

ج - $D =]-\infty; 2] ; f(x) = \sqrt{-2x+4}$

18 المستوى منسوب إلى معلم .

f ، g و h دوال معرفة كالتالي :

$f(x) = x^2 - 3x + 4$ معرفة على $\mathbb{R}$.

$g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ معرفة على $\mathbb{R}^*$.

$h(x) = -4x + 6\sqrt{x}$ معرفة على $[0; +\infty[$

برهن أن منحنيات هذه الدوال تقبل نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

19 في كل من الحالات التالية ، أحسب الدوال المشتقة

المتتابعة الأولى ، الثانية والثالثة للدالة f مبيّناً في كل مرة المجموعة التي تجرى عليها الحساب .

أ - $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$

ب - $f(x) = x\sqrt{x}$

ج - $f(x) = \frac{1}{2x-1}$

20 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \cos x$

أ) عيّن f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f .

ب) أعط تخميناً ، حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n ، لعبارة $f^{(n)}(x)$.

21 نعتبر الدالة $f : x \mapsto x^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$ أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

- من أجل $n=2$ أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$.

- من أجل $n=3$ أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$.

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، أعط تخميناً حول أصغر قيمة للعدد p التي يكون من أجلها $f^{(p)}(x) = 0$

22 من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ نضع $f(x) = \frac{1}{x}$

و $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ و $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ الدالتان

المشتقتان ذاتين الرتبة العدد الطبيعي غير المعدوم n .

عين أصغر عدد n الذي من أجله يكون $f^{(n)} = g^{(n)}$.

$\frac{f(-2+h)+6}{h} = 3 + \frac{|h|}{h}(4-h)$

(3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 .

2 - المشتقات والعمليات عليها

12 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، برّر أن

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أعط عبارة مشتقتها . مع اعتبار x و m عدنان حقيقيان .

أ - $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6$

ب - $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{4}$

ج - $f(x) = 2mx^3 + 3m^3x^2 - m^2x + m - 2$

د - $f(m) = 2mx^3 + 3m^3x^2 - m^2x + m - 2$

13 أحسب الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية مبيّناً

مجموعة التي تجرى الحسابات عليها .

أ - $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ب - $f(x) = \frac{x^2-4x-3}{x^2+x+3}$

ج - $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ د - $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

من التمرين 14 إلى 17 ، المطلوب حساب الدالة

المشتقة للدالة f على المجال المعطى D .

14 أ - $D = \mathbb{R} ; f(x) = x + x \cos x$

ب - $D = \mathbb{R} ; f(x) = \sin x \cos x$

ج - $D = \mathbb{R}^* ; f(x) = \frac{\sin x}{x}$

15 أ - $D =]0; \pi[; f(x) = \frac{1}{\sin x}$

ب - $D = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[; f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

ج - $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[; f(x) = \frac{\cos x}{-1 + \sin x}$

16 أ - $D = \mathbb{R} ; f(x) = \cos\left(-3x + \frac{\pi}{5}\right)$

ب - $D = \mathbb{R} ; f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$

ج - $D = \mathbb{R} ; f(x) = 3x \sin\left(-x + \frac{\pi}{5}\right)$

23 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sin \theta x \text{ و } g(x) = \cos \theta x \text{ مع } \theta \in \mathbb{R}$$

أ- بين أن $f''(x) = -\theta^2 f(x)$

ب- بين أن $g''(x) = -\theta^2 g(x)$

ج- من أجل كل عددين حقيقيين a و b نضع :

$$h(x) = af(x) + bg(x)$$

بين أن $h''(x) = -\theta^2 h(x)$

24 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$$

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$$

3- اتجاه تغير دالة

25 في كل من الحالات التالية أدرس اتجاه تغير الدالة f .

أ- $f(x) = 2x^4 - 27x + 7$

ب- $f(x) = (2x-3)\sqrt{x}$

ج- $f(x) = x + \cos x$

د- $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ هـ- $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

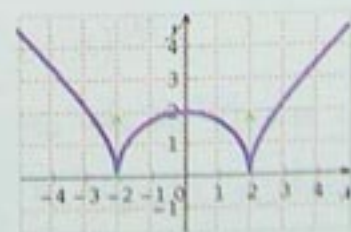
26 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

(1) أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$

(2) أ- استنتج إشارة $f'(x)$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f



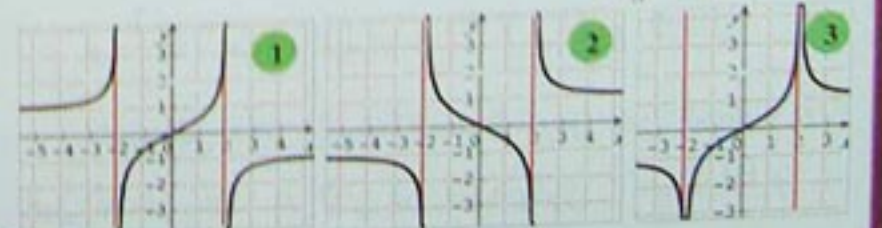
27 الشكل المقابل هو المنحني $\mathcal{C}_f$

لدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة

من المجموعة $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

من بين المنحنيات الثلاث ، ما هو الذي يمثل f' الدالة

المشتقة للدالة f ؟



28 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$$

(1) أدرس تغيرات الدالة f ونهايتها عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) هل الدالة f تقبل قيم حدية محلية ؟

(3) هل الدالة f محدودة على $\mathbb{R}$ ؟

29 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1}$$

مع a و b عددين حقيقيين.

الهدف من التمرين هو إيجاد إن أمكن a و b حيث يكون

$f(-1)$ قيمة حدية محلية عظمى معدومة .

(1) لماذا $f'(-1) = 0$ و $f(-1) = 0$ ؟

(2) أوجد إذن a و b ، ثم تحقق أن الدالة المحصل عليها

تحقق الهدف .

30 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$\mathcal{C}$ هو تمثيلها البياني

المرسوم على شاشة الحاسبة

البيانية .

1. شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. استنتج تغيرات الدالتين التاليتين (مع الشرح)

$$f_1: x \mapsto \frac{-2}{(x+1)^2} \text{ ، } f_2: x \mapsto 2 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

31 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

(1) عين النهايتين للدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) أدرس تغيرات الدالة f ؟

(3) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول .

(4) أعط حصرا بتقريب إلى 10^{-1} لكل حل .

32 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$$

(1) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

(2) ما هو عدد حل المعادلة $f(x) = 0$ ؟

(3) أعط حصرا لكل حل بتقريب 10^{-1} .

33 عدد طبيعي غير معدوم ، a عدد حقيقي .

- (1) أدرس حسب شفعية n ، تغيرات الدالة $f_n : x \mapsto x^n$.
- (2) أدرس النهايات للدالة f_n عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
- (3) ناقش حسب قيم n و a ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x ، $x^n = a$.

4 - اشتقاق دالة مركبة

34 الدوال المقترحة أدناه معرفة على $\mathbb{R}$ ؛ المطلوب حساب الدالة المشتقة لكل منها .

(أ) $f(x) = (x^2 + 2x - 3)^3$.

(ب) $g(x) = (2x^2 + x - 1)^4$.

(ج) $h(t) = (t^3 - t + 1)^5$. (د) $t(u) = \frac{1}{(u^2 + 3)^8}$.

في التمارين 35 ، 36 و 37 ؛ المطلوب حساب الدالة المشتقة للدالة المقترحة f المعرفة على المجال I المعطى .

35 (أ) $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^3$ و $I =]1; +\infty[$.

(ب) $f(x) = \left(\frac{x+2}{3x+4}\right)^3$ و $I =]-\infty; -\frac{4}{3}[$.

(ج) $f(x) = \frac{(3x+2)^3}{(4x+2)^2}$ و $I =]-\infty; -\frac{1}{2}[$.

(د) $f(x) = (4x-2)^2(3x-2)^3$ و $I = \mathbb{R}$.

36 (أ) $f(x) = \sin(1-x^2)$ و $I = \mathbb{R}$.

(ب) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ و $I = \mathbb{R}^*$.

(ج) $f(x) = \cos^3 x$ و $I = \mathbb{R}$.

(د) $f(t) = \tan^3 t$ و $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

37 (أ) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ و $I = \mathbb{R}$.

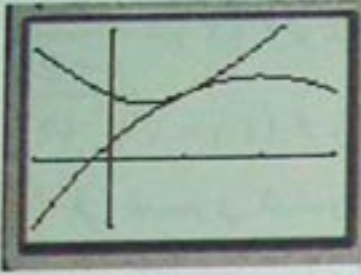
(ب) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$ و $I = \mathbb{R}$.

(ج) $f(t) = \sqrt{\frac{2-t}{1+t}}$ و $I =]-1; 2[$.

(د) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ و $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

38 لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة .

- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ومن أجل كل $x \in I$ ، $(f^n)'(x) = nf'(x)f^{n-1}(x)$.
- (2) برهن أنه يمكن تمديد هذه القاعدة من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n .



39 باستعمال حاسبة بيانية

مثلنا المنحنيين الذين معادلتيهما

$$y = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\text{و } y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

- (1) ما هو التخمين الذي يمكن وضعه حول المنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

(2) f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \text{ و } g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

أ - برهن أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ب - أحسب $f(1)$ ، $g(1)$ ، $f'(1)$ و $g'(1)$.

ج - برهن التخمين الموضوع سابقا .

40 $\mathcal{C}_f$ هو التمثيل البياني ، في معلم متعامد ومتجانس ،

للدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$.

(أ) برهن أن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى $\mathcal{C}_f$.

(ب) أحسب الدالة المشتقة للدالة f . أنشئ جدول تغيرات

الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(ج) برهن أن المستقيم ذي المعادلة $y = 2x$ هو مقارب

للمنحنى $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$.

(د) أرسم المنحنى $\mathcal{C}_f$ ومستقيمه المقارب .

5 - التقريب التآلفي

41 برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل الحالة من

الحالات التالية :

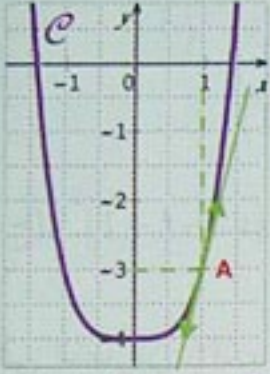
(أ) $(1+x)^3 \approx 1+3x$ (ب) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$

(ج) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ (د) $\sin x \approx x$

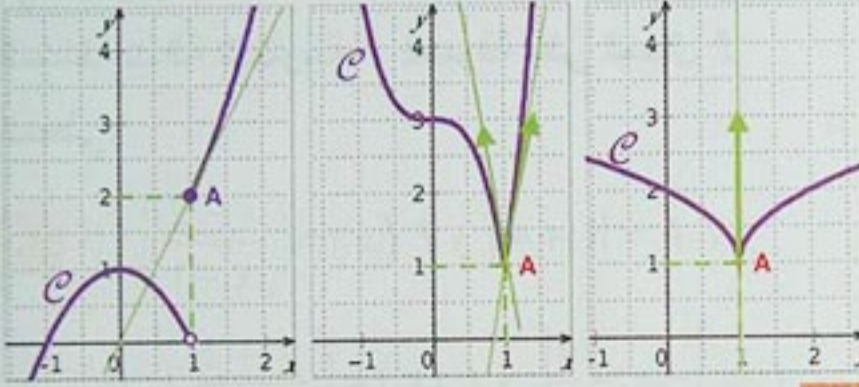
42 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2$.

المنحني البياني $\mathcal{C}_f$ التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. بقراءة بيانية عين العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\frac{1}{2}$ ، -3 و -2 علماً أن ترتيب النقطة B هو $-\frac{9}{4}$.
4. استنتج معادلات المماسات للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند A ، B و C .
5. هل توجد مماسات أخرى للمنحني $\mathcal{C}_f$ موازية لمماسه عند النقطة C ؟



47 في كل حالة $\mathcal{C}$ هو التمثيل البياني لدالة f و A نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها 1.
(أ) هل الدال f تقبل الاشتقاق عند 1؟
(ب) عين العدد المشتق في حالة وجوده.



48 الدالة f معرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

- (1) لاحظ على شاشة الحاسبة البيانية، منحني الدالة f وأعط تخميناتك حول قابلية الاشتقاق عند -2 وعند 0 .
 - (2) برهن كل تخمين باستعمال تعريف الاشتقاقية.
- في التمرينين أذكر إن كانت الدالة المقترحة f قابلة للاشتقاق عند 0 .

49 (أ) $f(x) = x\sqrt{x}$ (ب) $f(x) = x^2\sqrt{x}$

50 (أ) $f(x) = x|x|$

(ب) $f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{x+1}}$

51 الدالة f معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(0) = 0$

ومن أجل كل $x \neq 0$ ، $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$

- (1) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟
- (2) أحسب $f'(x)$ من أجل $x \neq 0$.

(أ) عين التقريب التآلفي لعبارة $f(2+h)$ من أجل h قريب من 0 ؛ مبيّننا الارتياح المرتكب.

(ب) أحسب ذهنياً قيمة مقربة للعدد $2,029^2$.

43 أعط تقريباً تآلفياً لعبارة $f(a+h)$ من أجل $|h|$ قريب من 0 ؛ مبيّننا الارتياح المرتكب من أجل $|h| < 10^{-3}$.

(1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ و $a = 2$.

(2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ و $a = -2$.

(3) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ و $a = -1$.

44 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

نعتبر (منحني دالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فاصلة النقطة A ، و (مماس للمنحني (C_f) عند النقطة A .

B و C نقطتان من (C_f)

فاصلتهما $x_0 - h$ و $x_0 + h$ على الترتيب حيث $h > 0$ وقرب من 0 .

D نقطة حيث (BD) يعامد (CD).

(1) أعط قيمة مقربة لمساحة الشكل الهندسي BCD (شبه مثلث قائم)،

بدلالة $f'(x_0)$ و h .

(2) أحسب هذه القيمة من أجل $h = 0.03$ ومعامل

توجيه المستقيم (T) هو 9 .

45 بدون حساب وباستعمال التقريب التآلفي، عين العدد

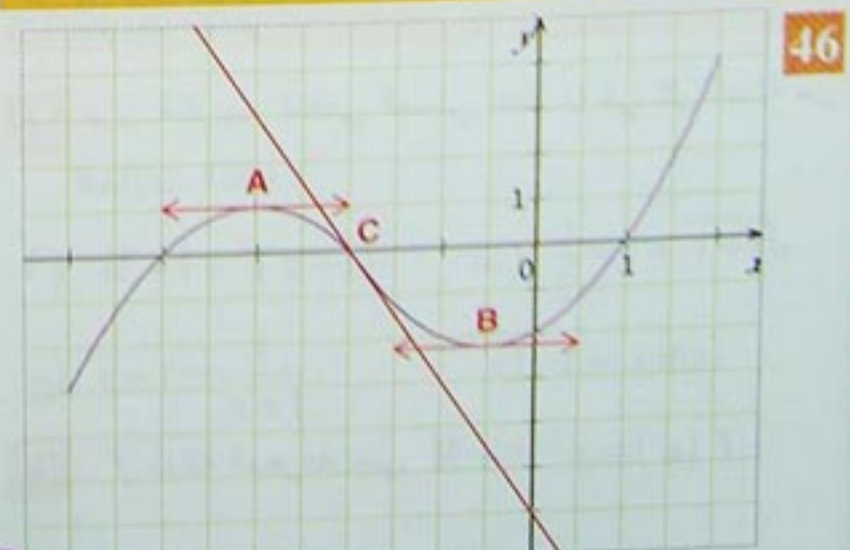
المشتق للدالة f عند a ، في كل من الحالتين التاليتين:

أ - $f: x \mapsto 1 - 2x + 3x \tan x$ و $a = 0$.

ب - $f: x \mapsto 2x + (x+1)^2 \sqrt{x^4+3}$ و $a = -1$.

تمارين للتعمق

1. الاشتقاقية



- 52** $\mathcal{C}_f$ هو المنحني الممثل في معلم متعامد ومتجانس ،
للدالة f المعرفة على $\mathbb{R} : f(x) = |x^2 - 1|$.
(1) أرسم المنحني $\mathcal{C}_f$ عين نقطته A ذات الفاصلة -1 .
(2) أ) بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين -1 .
ب) عين معادلة ، على اليمين ، لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند
النقطة A ، ثم أرسمه .
(3) أ) بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار -1 .
ج) عين معادلة ، على اليسار ، لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند
النقطة A ، ثم أرسمه .
(4) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند -1 .

- 53** f الدالة المعرفة على المجال $[0; 2]$ ، تمثيلها
البياني $\mathcal{C}$ هو عبارة عن نصف دائرة
كما هو مبين في الشكل .
(1) بقراءة بيانية، برّر أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .
(2) برّر أن : تكون النقطة $M(x; y)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ ،
إذا وفقط إذا ، كانت $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $y \geq 0$.
أكتب عبارة $f(x)$ من أجل كل $x \in [0; 2]$.
(3) جد بالحساب النتيجة المحصل عليها في السؤال (1) .

2 - المشتقات والعمليات عليها

- 54** لتكن f الدالة : $x \mapsto \sqrt{x} \sin x$.
(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .
(2) برّر أن الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$
واحسب $f'(x)$ على هذا المجال .
(3) برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين مبيّناً
قيمة $f'(0)$.
(4) أعط تعريف الدالة f' على المجموعة D_f .
55 a و b عدنان حقيقيان . نعتبر الدالة f المعرفة على
 $\mathbb{R} : f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$: نسمي $\mathcal{C}_f$ تمثيلها
البياني في معلم .
هل يوجد عدنان a و b حيث تكون لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$ ،
معادلة $y = 4x + 3$ عند نقطته ذات الفاصلة 0 ؟

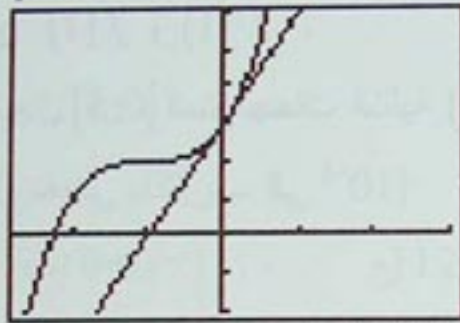
- 56** a عدد حقيقي . نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} : f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$.
هل يوجد عدد a حيث تكون للدالة f قيمة حدية محلية ،
من أجل $x = 1$ ؟

- 57** ليكن $\mathcal{C}$ المنحني ذي المعادلة :

$$xy + 4x + 3y + 7 = 0$$

- برهن أن النقطة $A(-2; 1)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ ، وأن $\mathcal{C}$ يقبل
مماساً عند النقطة A يطلب تعيين معادلة له .

- 58** f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} : f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$
على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحني $\mathcal{C}$ الممثل
للدالة f والمماس T عند النقطة A التي فاصلتها 0 .



1. عين معادلة للمماس T .
2. خمن على الشاشة وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس T .
3. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x :
 $f(x) - (3x + 3) = x^2(x + 3)$.
4. ادرس إشارة $f(x) - (3x + 3)$ ثم استنتج وضعية
المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس T .

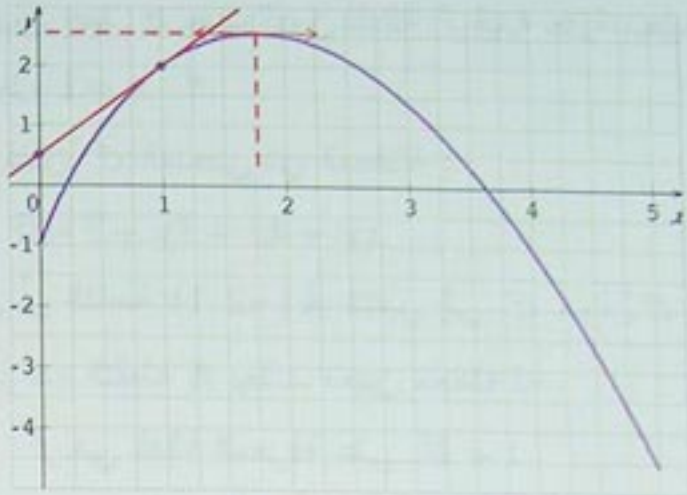
- 59** لتكن a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a > 0$ وليكن
 $\mathcal{P}$ القطع المكافئ ذي المعادلة $y = ax^2 + bx + c$.
(1) ليكن x_0 عدد حقيقي ، و M_0 نقطة من $\mathcal{P}$ فاصلتها x_0
عين معادلة للمماس T للمنحني $\mathcal{P}$ عند النقطة M_0 .
(2) برهن أن $\mathcal{P}$ يقع فوق كل مماساته .
(3) عين مجموعة النقط M ، ذات الإحداثيات $(x; y)$ ،
حيث يوجد مماس للمنحني $\mathcal{P}$ عند النقطة M .

- 60** (1) عين مجموعة تعريف الدالة $f : x \mapsto \frac{3+x^3}{1-x}$
ثم أحسب دالتها المشتقة .

(2) استنتج الدالة المشتقة للدالة $g : x \mapsto \frac{3-x^3}{1+x}$

مبيّناً المجموعة التي تقام فيها الحساب .

61 الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;5]$



المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني عند النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و $\frac{16}{9}$.

1. بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.
2. حل بيانيا في المجال $[0;5]$ المتراجحات التالية (القيم المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-1})
3. قبل أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ب} \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{ج} \quad f(x) \leq 1$$

$$f(x) = a + bx(2 - \sqrt{x})$$

a و b عددان حقيقيان نريد حسابهما.

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$,

$$f'(x) = b \left(2 - \frac{3}{2} \sqrt{x} \right)$$

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال أ عين a و b .

62 n عدد طبيعي غير معدوم، و x عدد حقيقي يختلف عن 1.

- (1) بسط المجموع $1 + x + x^2 + \dots + x^n$.
- (2) استنتج تبسيطاً للعلاقة:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

63 جسم يتحرك على المحور (Ox) . نضع $x(t)$

فاصلة الجسم عند اللحظة t ، القانون الزمني للحركة

$$x(t) = 3 \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$$

برهن أن التسارع متناسب مع الفاصلة.

64 من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ نضع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $f^{(n)}$

المشتقة ذات الرتبة العدد الطبيعي غير المعدوم n للدالة f . برهن، باستعمال الاستدلال بالتراجع، أنه من أجل كل عدد

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}, \quad n \text{ طبيعي غير معدوم}$$

65 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x \cos x$

- (1) من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$.
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

n ، ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f^{(n)}(x) = x \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + n \cos \left(x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right)$$

66 الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

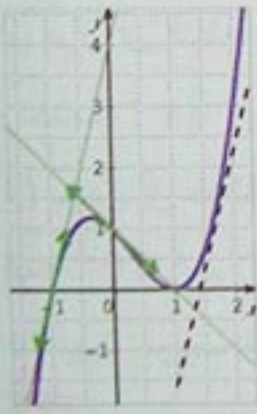
- (1) جد عددين حقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ ،

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

(2) n عدد طبيعي غير معدوم.

باستعمال النتيجة السابقة، أعط عبارة لـ: $f^{(n)}(x)$.

3 - اتجاه تغير دالة



67 في الشكل المقابل، $\mathcal{C}_f$ هو المنحني

الممثل في معلم متعامد ومتجانس لدالة f

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؛ والمماسان لـ $\mathcal{C}_f$

عند نقطتيه A و B ، فاصلتيهما -1 و 0.

(1) بقراءة بيانية، عين القيم $f(-1)$ ،

$$f(0), f'(0), f'(-1), f(1), f'(1)$$

(2) حل بيانيا، في المجال $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right]$:

$$f(x) = 0 \quad \text{أ)}$$

$$f'(x) = -1 \quad \text{ب)}$$

$$f'(x) \geq 4 \quad \text{ج)}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

حيث a, b, c, d أعداد حقيقية .

أ- بين باستعمال الشروط السابقة أن :

$$d = 0 \text{ و } c = -3, b = 1, a = \frac{1}{3}$$

ب- حل $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f .

73 الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ :

$$f_m(x) = \frac{x^2 + mx}{x^2 - 1} \text{ مع } m \text{ عدد حقيقي .}$$

أ) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m لا تقبل قيم حدية محلية ؟

ب) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m تقبل قيمتين

حديتين محليتين إحداها صغرى والأخرى عظمى ؟

74 A, B و C ثلاث نقط من المستوى ليست في

استقامية . k عدد حقيقي من المجال $[-1; 1]$.

نسمي G_k مرجح النقط المثقلة $(A, k^2 + 1), (B, k),$

و $(C, -k)$.

1) مثل النقط A, B, C و I منتصف القطعة $[BC]$.

وأنشئ النقطتين G_1 و G_{-1} .

2) أ - برهن أنه من أجل كل $k \in [-1; 1]$ يكون :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$$

ب - أنشئ جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-1; 1]$

$$f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

ج - استنتج مجموعة النقط G_k لما k يسمح $[-1; 1]$.

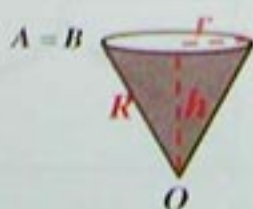
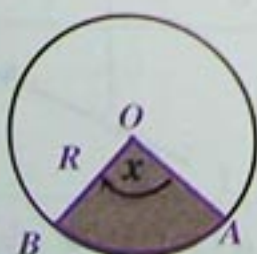
75 نعتبر قرصاً مركزه O ونصف قطره R ، انقص

منه قطاعاً زاوياً $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ قياسه x مقدراً بالراديان ،

عندما نلصق القطعتين $[OA]$ و $[OB]$ مع بعضهما

نحصل على مخروط دوراني نصف قطر قاعدته r

وارتفاعه h .



68 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، تقبل الاشتقاق مرتين

وتحقق الشرطين التاليين : $f(0) = 0$ ؛ $f'(0) = 1$.

* f' (الدالة المشتقة الأولى للدالة f) متزايدة على

$[0; +\infty[$ و متناقصة على $]-\infty; 0]$.

أرسم منحن للدالة f .

69 f هي الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$$

1) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I .

2) أ - استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α

في المجال $]1; 2[$.

ب - أعط قيمة مقربة إلى 10^{-1} للحل α .

70 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x$$

أ) أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب) أدرس إشارة كثير الحدود

$$p(x) = 4(x-2)(x+1)^2$$

ج) عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

71 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$

أ - أدرس تغيرات الدالة f .

ب - برهن أن -6 هو عنصر حاد من الأسفل للدالة

f على المجال $[0; +\infty[$.

72 بكالوريا

الشكل الموالي هو

التمثيل البياني $\mathcal{C}$ لدالة

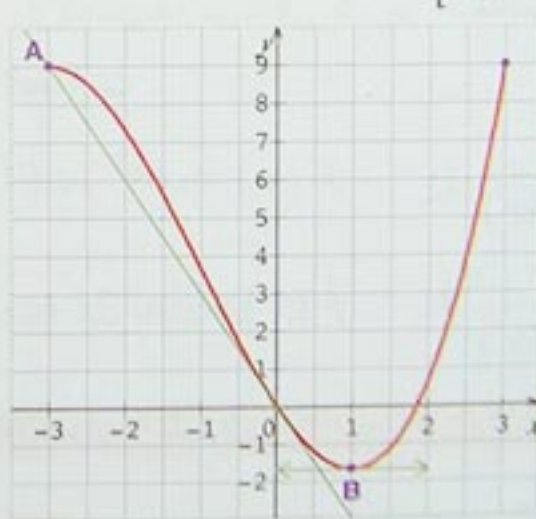
f معرفة و قابلة

للاشتقاق على المجال

$[-3; 3]$ في معلم

متعامد ومتجانس

$(O; I, J)$



المنحني $\mathcal{C}$ يحقق الشروط التالية :

يمر بمبدأ المعلم O ، ويشمل النقطة $A(-3; 9)$ ، يقبل

في النقطة B التي فاصلتها I مماساً أفقياً و يقبل المستقيم

(OA) كعماس عند النقطة O .

1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA) ؟

2. نفرض أن f معرفة على $[-3; 3]$ بـ :

(1) عبّر عن r و h بدلالة x و R .

(2) برهن أن حجم المخروط الدوراني معرف بالعلاقة :

$$V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

(3) أ- أدرس تغيرات الدالة V على المجال $]0; 2\pi[$.

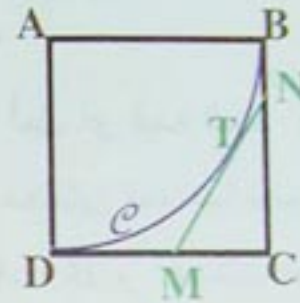
ب- من أجل أي قيمة للعدد x يكون حجم المخروط أكبر

ما يمكن ؟ أحسبه بدلالة R .

76 $ABCD$ مربع ضلعه 1.

$\mathcal{C}$ هو الربع الدائرة ذات المركز A ونصف القطر AB ،

المرسوم داخل المربع .



T نقطة من $\mathcal{C}$ مختلفة عن B و D . المماس لـ $\mathcal{C}$

عند T يقطع $[DC]$ في M ويقطع $[BC]$ في N .

نضع $x = DM$ و $y = BN$.

(1) أ- برهن أن : $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.

ب- برهن أن : $MN = MT + TN = x + y$.

ج- مما سبق ، عبّر عن y بدلالة x .

د- أحسب إذن MN بدلالة x .

(2) f هي الدالة المعرفة على $]0; 1[$ بـ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- ما هي وضعية النقطة M التي من أجلها المسافة

MN أصغر ما يمكن ؟

4- اشتغل دالة مركبة .

77 جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على

$$D_u = [-2; 3]$$

x	-2	-1	0	1	2	3
$u'(x)$		+	0	-	0	+
$u(x)$	2	3	0	-1	0	2

(1) عيّن إشارة $u(x)$.

(2) نعتبر الدوال f, g, h, k المعرفة كما يلي :

$$k = \sqrt{u} ; h = \frac{1}{u} ; g = u^3 ; f = u^2$$

أ) عيّن مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال h, g, f و k .

ب) عبّر عن كل من $f'(x), g'(x), h'(x)$ و

$k'(x)$ بدلالة $u(x)$ و $u'(x)$.

ج) استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال h, g, f و k .

78 (1) أحسب الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} ; \mathbb{R} - \{1\}$$

(2) استنتج الدالة المشتقة لكل من الدوال المقترحة التالية :

$$(أ) g : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \quad (ب) h : x \mapsto \frac{x^4+1}{x^2-1}$$

$$(ج) u : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} \quad (د) v : x \mapsto \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$$

79 (1) إذا كانت دالة f زوجة وقابلة للاشتقاق فما هي

شعبية دالتها المشتقة f' ؟

(2) إذا كانت دالة g فردية وقابلة للاشتقاق فما هي

شعبية دالتها المشتقة g' ؟

80 في كل من الحالات التالية أحسب الدالة المشتقة للدالة

f المقترحة مبيّناً في كل مرة المجموعة التي تجرى عليها الحسابات .

$$(أ) f(x) = \cos^3 2x \quad (ج) f(x) = \frac{1}{\sin^4(-3x)}$$

$$(ب) f(x) = \sin^3 3x \quad (د) f(x) = \frac{1}{\cos^3(-4x)}$$

5- دراسة الدوال .

81 لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$

نسمي المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

(1) أدرس تغيرات الدالة f . استنتج أن المنحني $\mathcal{C}_f$ يقبل

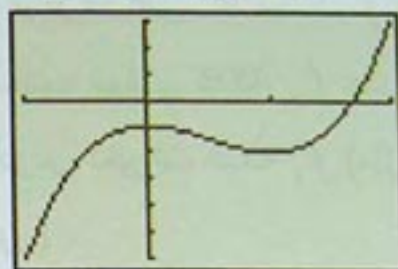
مستقيماً مقارباً عمودياً .

86 (I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$

بي : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.

(1) لاحظ (C_g) على شاشة الحاسبة البيانية ثم ضع تخمينا



حول عدد جذورها و حول إشارتها.

(2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

محسورا بين 1,6 و 1,7.

(4) استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بي

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

$(O; I, J)$ (الوحدة: 4cm).

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

أعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين.

(2) بين أنه من كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ ،

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عين معادلة Δ مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; +1[$ ،

$$f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

(6) بعد دراسة إشارة $f(x) - (-x+1)$ استنتج وضعية

المنحني (C_f) بالنسبة للمماس Δ ، ماذا تلاحظ ؟

(7) ارسم المستقيم Δ و المنحني (C_f) .

87 نعتبر الدالة f المعرفة على D_f بي :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

حيث $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ و ليكن

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

(1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لمحور الترتيب.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(3) بين أنه من أجل كل x من D_f ،

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

(4) بين أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيما

مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل Δ .

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في

المجال $]-1; 1[$ يطلب إيجاد ، باستعمال حاسبة بيانية ، حصر له سعته 0,1.

(6) أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f) .

(7) من ملاحظة (C_f) خمن وجود مركز تناظر

للمنحني (C_f) ثم أثبت صحة أو عدم صحة تخمينك.

88 (I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بي :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$$

$\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس .

(1) برهن أنه يوجد عدنان حقيقيان a و b حيث من أجل

$$f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{(x+2)}$$

(2) أ - أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب - أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

(II) نسمي Γ القطع المكافئ ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$

حيث $x \neq 2$.

P و M نقطتان من Γ و $\mathcal{C}$ على الترتيب ، لهما الفاصلة

x مشتركة .

(1) أحسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{PM}$.

(2) بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هو مقارب مائل للمنحني C_f .

(3) أدرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم المقارب له المائل.

(4) أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل.

(5) أكتب معادلة للمماس Δ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(6) أنشئ Δ ثم المنحني C_f .

82 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$:

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x-2}$$

C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم.

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أ - برّر أن المستقيم d ذي المعادلة $y = x + 3$ هو مقارب مائل للمنحني C_f . أدرس الوضعية النسبية لـ C_f بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل.

ب - أرسم d ثم C_f .

(3) أ - استعمل C_f ، عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$.

ب - استنتج حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $\cos(2u) + 2(1-m)\cos u + 4m + 1 = 0$ مع $u \in [0; 2\pi]$.

83 لتكن الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2}$$

نسمي C_f المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس.

(1) عيّن مجموعة تعريف الدالة f .

(2) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة تعريف الدالة f :

$$f(x) = a + \frac{b}{2x-1} + \frac{b}{x-2}$$

(3) أدرس تغيرات الدالة f ثم أكتب معادلة لكل من المستقيمت المقاربة للمنحني C_f .

(4) أكتب معادلة لمماس المنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) عيّن إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f وحامل محور الفواصل.

(6) أرسم المنحني.

84 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر الدالة

$$f_n \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ : } f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$$

(1) أحسب نهايتي الدالة f_n عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

(2) أدرس تغيرات الدالة f_n (ميّز الحالتين n زوجي ثم فردي).

(3) نسمي C_n المنحني الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس.

أ - تحقق من أن المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو محور تناظر للمنحني C_n .

ب - برّر أن C_n يمرّ من أربع نقط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي n . أحسب إحداثيات هذه النقط. أرسم في نفس المعلم المنحنيين C_1 و C_7 .

85 نعتبر الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$$

يرمز C إلى المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f . استنتج معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني C .

(2) أكتب معادلة لمماس المنحني C عند نقطته ذات الفاصلة 5.

(3) أثبت أن المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو محور

تناظر للمنحني C . أرسم المنحني C .

(4) نعتبر الدالة f_m المعرفة بـ:

$$f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$$

— أدرس تغيرات الدالة f_m واستنتج المستقيمين القاربين لمنحنها C_m .

— بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات C_m .

— ما هو المنحني الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين

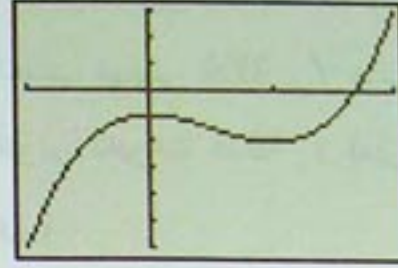
$(4; 1)$ ؟

86 (I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$

بي : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.

(1) لاحظ (C_g) على شاشة الحاسبة البيانية ثم ضع تخمينا



حول عدد جذورها و حول إشارتها.

(2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 1,6 و 1,7.

(4) استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بي

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

$(O; I, J)$ (الوحدة: 4cm).

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

أعط تفسيراً بيانياً للنتيجتين.

(2) بين أنه من كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ ،

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; +1[$ ،

$$f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

(6) بعد دراسة إشارة $f(x) - (-x+1)$ استنتج وضعية

المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (Δ) ، ماذا تلاحظ ؟

(7) ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f) .

87 نعتبر الدالة f المعرفة على D_f بي :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

حيث $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ و ليكن

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

(1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لمحور الترتيب .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(3) بين أنه من أجل كل x من D_f ،

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

(4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيما

مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) .

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; 1[$ يطلب إيجاد ، باستعمال حاسبة بيانية ، حصر له سعته 0,1.

(6) أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f) .

(7) من ملاحظة (C_f) خمن وجود مركز تناظر

للمنحني (C_f) ثم أثبت صحة أو عدم صحة تخمينك.

88 (I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بي :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$$

$\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس .

(1) برهن أنه يوجد عدداً حقيقياً a و b حيث من أجل

كل $x \neq 2$ ، تكون $f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{(x+2)}$.

(2) أ - أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب - أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

(II) نسمي Γ القطع المكافئ ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$

حيث $x \neq 2$.

M و P نقطتان من Γ و $\mathcal{C}$ على الترتيب ، لهما الفاصلة

x مشتركة .

(1) أحسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{PM}$.

استنتج أن، لما x يؤول إلى $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ فإن المسافة PM تؤول إلى 0. فسر هذه النتيجة هندسيا .

(2) أرسم في نفس الشكل المنحنيين Γ و $\mathcal{C}$.

89 λ عدد حقيقي موجب تماما . f_λ الدالة المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بـ :

$$f_\lambda(x) = x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} \quad \mathcal{C}_\lambda \text{ تمثلها البياني في معلم .}$$

(1) أ - أدرس نهايتي الدالة f_λ عند حدود المجال I .

ب - برهن أنه يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}_\lambda$ وأدرس وضعيتهما النسبية .

(2) أ - أدرس تغيرات الدالة f_λ على المجال I .

ب - برهن أن f_λ تقبل قيمة حدية تبلغها عند عدد حقيقي x_λ .

(3) P_λ نقطة من $\mathcal{C}_\lambda$ فاصلتها x_λ .

أ - برهن أن مجموعة النقط P_λ محتواة في المستقيم ذي المعادلة $y = \frac{16}{9}x$.

ب - ما هي مجموعة النقط P_λ عندما يمسح λ المجال I .
90 بكالوريا

f هي الدالة المعرفة على المجموعة $\mathcal{D}_f$ بـ :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

مع $\mathcal{D}_f =]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$ ؛ و $\mathcal{C}$ تمثلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب النهايتين للدالة f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

(2) بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = 2x + 3$ ، هو مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}$ بجوار $(+\infty)$.

(3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟ عند -4 ؟

(4) أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in \mathcal{D}_f - \{-4; 0\}$.

(5) أنشئ جدول التغيرات للدالة f .

(6) أرسم المستقيم المقاربة ثم المنحني $\mathcal{C}$.

91 بكالوريا

F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $F(0) = 0$

$$\text{ومن أجل كل عدد حقيقي } F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$. نسمي $\mathcal{C}$ تمثلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

(1) G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

أ - برر أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأحسب $G'(x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$.

ب - أحسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية .

(2) H الدالة المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بـ :

$$H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

أ - برر أن H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من أجل $x \in I$.

ب - برهن أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$.

ج - استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2F(1)$.

د - ماذا ينتج عن المنحني $\mathcal{C}$ ؟

(3) T الدالة المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ بـ :

$$T(x) = F(\tan x) - x$$

أ - أحسب $T'(x)$. ماذا ينتج عن الدالة T ؟

ب - أحسب $F(1)$.

(4) أنجز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

(5) أرسم المنحني $\mathcal{C}$ ، مستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1 .

92 f هي الدالة المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ بـ :

$$f(t) = 2 \tan t + 1$$

$\mathcal{C}$ تمثلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

أ - عين معادلة للمماس T للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب - أدرس الوضعية النسبية للمنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة لـ T .

93 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sin^2 x$$

وليكن $\mathcal{C}$ تمثلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ - برهن أن الدالة f دورية ذات الدور π .

ب - برهن أن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحني $\mathcal{C}$.

ج - أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

د - أرسم المنحني الذي يمثل الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ثم على المجال $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

94 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$$

(1) قارن بين $f(x)$ وكل من $f(x+2\pi)$ ، $f(-x)$ و $f(\pi-x)$.

برهن إذن أنه يكفي دراسة الدالة f على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x) = -6 \sin x \sin 2x$$

(3) أدرس تغيّرات الدالة f على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(4) أرسم منحنى الدالة f على $[-2\pi; 2\pi]$.

95 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x$$

ولیکن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ - برهن أن الدالة f دورية ذات الدور 2π .

ب - برهن أن محور الترتيب هو محور للمنحني $\mathcal{C}$.

(2) أ - عيّن f' الدالة المشتقة للدالة f .

ب - برّر أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x) = \sin(x) [1 - 2 \cos(x)]$$

ج - أدرس إشارة $f'(x)$ من أجل $x \in [0; \pi]$.

(3) أ - أنجز جدول تغيّرات للدالة f على $[0; \pi]$.

ب - أرسم المنحني الذي يمثل الدالة f على $[-\pi; \pi]$.

ج - كيف يمكن استنتاج المنحني $\mathcal{C}$.

96 الهدف من التمرين هو تقريب محلي بجوار 0 للدالة

$\tan$ مع كثيرات الحدود.

نعتبر الدالتين f و g المرفقتين على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} \text{ و } g(x) = x + \frac{2x^3}{3}$$

باستعمال حاسبة بيانية أعط تخميناً حول وضعية منحنيات

الدوال f ، g و $\tan$.

الجزء الأول :

(1) أ - أدرس على المجال $I = \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ ، تغيّرات الدالة

$$u : x \mapsto \tan x - x$$

ب - استنتج إشارة $\tan x - x$ على المجال I .

(2) أ - برّر أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال I

$$\text{حيث } \tan^2 \alpha = \sqrt{2} - 1$$

ب - استنتج إشارة $\tan^2 x + 1 - \sqrt{2}$ على المجال I .

ج - أدرس تغيّرات الدالة $v : x \mapsto \tan x - x\sqrt{2}$

واستنتج إشارة $v(x)$ على المجال I .

الجزء الثاني :

(1) أدرس تغيّرات الدالة $x \mapsto \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ على

المجال I ، واستنتج أنه من أجل كل $x \in I$ ،

$$x + \frac{x^3}{3} \leq \tan x$$

(2) بإتباع نفس الطريقة للسؤال (1) برّر أنه من أجل كل

$$\tan x \leq x + \frac{2x^3}{3} , x \in I$$

(3) من شفعية الدالة $\tan$ ، برّر أنه من أجل كل

$$x + \frac{x^3}{3} \leq \tan x \leq x + \frac{2x^3}{3} , x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$$

97 f هي الدالة المعرفة على المجموعة $\mathcal{D}$ للأعداد

الحقيقية x حيث $x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، بـ :

$$f(x) = \tan(2x)$$

(1) أ - برهن أن الدالة f دورية ذات الدور $\frac{\pi}{2}$.

ب - برهن أنه من أجل كل x من $\mathcal{D}$ ،

$$f(-x) = -f(x)$$

استنتج أن المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f في معلم متعامد

ومتجانس ، متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم.

(2) أ - أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

ب - استنتج جدول تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

(3) أ - عيّن معادلة للمماس T للمنحني عند مبدأ المعلم.

يقطع كل من (Ox) و (Oy) في النقطتين A و B على الترتيب ؛ حيث ترتيب النقطة يكون أكبر من 1 .
نضع θ القياس بالراديان للزاوية $\widehat{OAB}$ والذي يحقق $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(1) أحسب بدلالة $\tan \theta$ ، فاصلة النقطة A ، ترتيب النقطة B ، ثم مساحة المثلث OAB .

(2) لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)(1 + 2x)$$

استنتج أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى يطلب تحديدها .

(3) استنتج مما سبق أصغر مساحة ممكنة للمثلث OAB .
أرسم المستقيم (AB) في هذه الحالة .

100 نضع كرة ذات نصف القطر R داخل مخروط

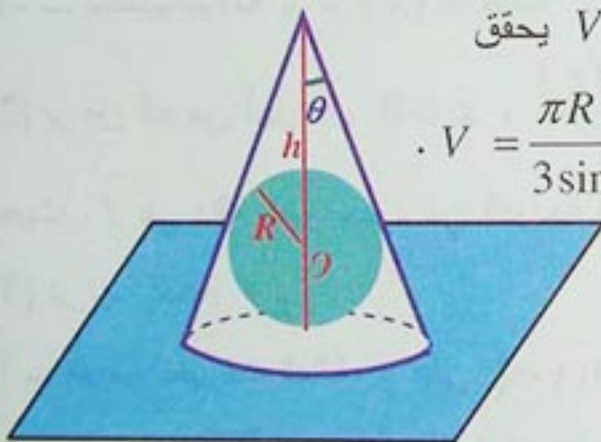
دوراني ، قياس نصف الزاوية إلى رأسه هي θ حيث

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

نفرض أن الكرة والمخروط الدوراني متماسان .

ونقبل أن حجمه V يحقق

$$V = \frac{\pi R^3 (1 + \sin \theta)^2}{3 \sin \theta (1 - \sin \theta)}$$



الهدف من التمرين هو تعيين ارتفاع المخروط الدوراني

بحيث يكون حجمه أصغر ما يمكن .

(1) برهن أن الارتفاع h والحجم V للمخروط الدوراني

$$V = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta$$

يحققان العلاقة :
(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $[0; 1[$ بـ :

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$$

(3) أ — استنتج من السؤال السابق ، أنه يوجد مخروط

دوراني له أصغر حجم ؛ نرمز بـ θ_0 إلى قياس نصف

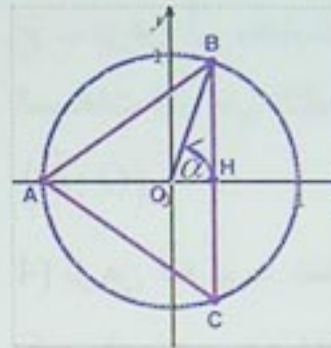
الزاوية إلى رأسه . حدد القيمة V_0 لأصغر حجم .

ب ـ أدرس وضعية C بالنسبة إلى T على $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
(4) أرسم T والمنحني الذي يمثل الدالة f على $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
واشرح كيف ينتج المنحني C .

مسائل

98 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$



مثلث ABC متساوي الساقين

رأسه $A(-1; 0)$ ، محيط بالدائرة

ذات المركز O ونصف القطر 1 .

النقطة B تقع فوق المحور (Ox) ،

و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

ليكن α قياساً رئيسياً موجباً مقدرًا بالراديان للزاوية

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$$

(1) — عين إحداثيتي النقطة B .

— عبّر عن المسافتين BH و AH بدلالة α .

— استنتج بدلالة α مساحة المثلث ABC .

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; \pi]$ بـ :

$$f(x) = \sin x (1 + \cos x)$$

أ — عين الدالة المشتقة للدالة f وبرهن أنه من أجل كل

$$f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1 \quad x \in [0; \pi]$$

استنتج أنه من أجل كل $x \in [0; \pi]$ ،

$$f'(x) = (2 \cos - 1)(\cos x + 1)$$

ب — أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات

الدالة f .

(3) برهن أنه توجد قيمة للعدد α التي من أجلها تكون

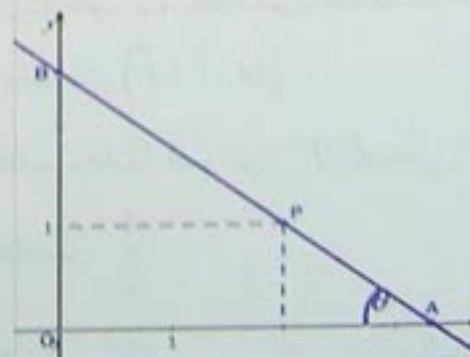
مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن ، المطلوب تحديد هذه

المساحة . ما هي إذن طبيعة المثلث ABC .

99 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر
 $(O; \vec{i}; \vec{j})$

نعتبر النقطة p ذات

الإحداثيتين $(2; 1)$.

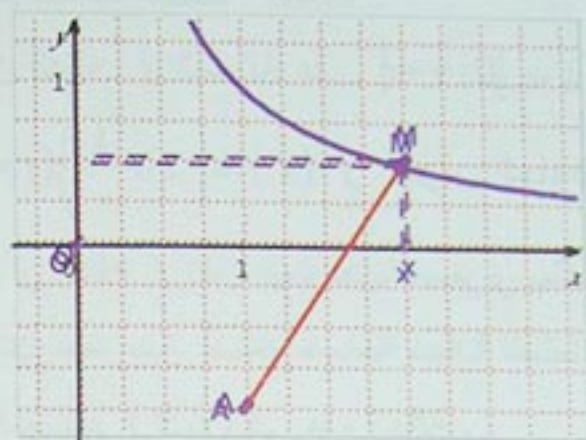


مستقيم يشمل النقطة p

ب - أحسب الارتفاع h_0 للمخروط الدوراني الذي له أصغر حجم .

101 في الشكل لدينا منحن ذي المعادلة $y = \frac{1}{x}$ مع $x > 0$

A و M نقطتان حيث $A(1; -1)$ و $M\left(x; \frac{1}{x}\right)$



الهدف من التمرين هو تعيين إن أمكن نقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

(1) أ - برّر أنه إذا أخذت AM أصغر قيمة فإن AM^2 تأخذ أصغر قيمة .

ب - أحسب بدلالة x ، حيث $d(x) = AM^2$

(2) برهن أنه من أجل كل $x > 0$ ، $d'(x) = \frac{2f(x)}{x^3}$

حيث f هي دالة كثير حدود من الدرجة الرابعة .

(3) دراسة الدالة f .

أ - أدرس تغيرات الدالة f على $I =]0; +\infty[$.

ب - برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

في المجال I . عيّن حصرا للعدد α نصف قطره 10^{-2} .

(ج) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال I .

(4) استنتج مما سبق تغيرات الدالة d وأعط خلاصة .

(5) برّر أنه إذا كانت M أقرب من النقطة A فإن المستقيم

(AM) يكون عموديا على مماس المنحني المعطى سابقا

في نقطته M .

102 في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2; 0; 0)$ ،

$B(-1; \sqrt{3}; 0)$ و $C(-1; -\sqrt{3}; 0)$

(1) مثل النقط A ، B و C في المستوي $p(O; \vec{i}; \vec{j})$

(2) برهن أن المثلث ABC تقايس أضلاع مركزه O .

(3) أ - عيّن مجموعة النقط M من الفضاء المتباعدة

المسافتين لكل من النقطتين A و B .

ب - عيّن مجموعة النقط N من الفضاء المتباعدة

المسافتين لكل من النقطتين B و C .

ج - برهن أن مجموعة النقط P من الفضاء المتباعدة

المسافات لكل من النقط A ، B و C هي حامل المحور

$(O; \vec{k})$.

(4) برهن أنه توجد نقطة وحيدة D راقمها موجب حيث

يكون الرباعي $ABCD$ منتظما وأحسب إحداثياتها .

(5) لتكن M نقطة كيفية من القطعة المستقيمة $[CD]$.

نضع $\overline{CM} = \lambda \overline{CD}$ مع $\lambda \in [0; 1]$.

أ - برهن أن $\cos \widehat{AMB} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$

نعرف الدالة f على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(\lambda) = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$$

ب - أدرس تغيرات الدالة f .

ج - استنتج وضعية النقطة M التي من أجلها تكون

الزاوية $\widehat{AMB}$ أكبر ما يمكن .

د - ما هي القيمة لأكبر زاوية $\widehat{AMB}$ ؟

103 (I) الدالة المعرفة على $[0; 1]$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

(1) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 .

(2) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) نسمي C_1 المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أكتب معادلة للمماس T للمنحني C_1 عند النقطة ذات

الفاصلة $\frac{1}{2}$.

(4) في نفس المعلم أرسم $\mathcal{C}_1$ ، ثم المنحني $\mathcal{C}_2$ نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى محور الفواصل .

(5) نضع $\Gamma = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ ولتكن $M(x; y)$ نقطة من المستوى . برهن أن $M \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان

$$(E) \quad x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$$

المنحني Γ يسمى المنحني اللبلاي لديكلويس (cissoïde de Dioclès) .

(II) النقطة ذات الإحداثيتين $(1; 0)$ ، $\mathcal{C}$ الدائرة ذات القطر $[OI]$ و Δ المماس للدائرة $\mathcal{C}$ عند النقطة I .
 d المستقيم الذي يشمل النقطة O ومعامل توجيهه العدد الحقيقي t .

(1) عيّن إحداثيتي M نقطة تقاطع الدائرة $\mathcal{C}$ والمستقيم d حيث $M \neq O$.

(2) عيّن إحداثيتي M' نقطة تقاطع المنحني Γ والمستقيم d حيث $M' \neq O$.

أحسب إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين Δ و d .

(3) استنتج طريقة لإنشاء المنحني Γ نقطة بنقطة انطلاقاً من النقطتين M و N .

أنشئ المنحني Γ

(III) (1) المستقيم (IM') يقطع محور الترتيب في P .

أ - برهن أن : $\overline{NM} \cdot \overline{NO} = \overline{NI} \cdot \overline{NO} = NI^2$ ،

$$\text{و } \overline{OM} \cdot \overline{ON} = \overline{OI} \cdot \overline{OI} = OI^2$$

ب - استنتج أن : $NI^2 = OM \times NO$ ،

$$\text{و } OI^2 = OM \times ON$$

$$\text{ج - برهن أن : } \frac{OP}{NI} = \frac{OM'}{M'N} = \frac{OM'}{OM}$$

د - استنتج من السؤالين ب و ج ، أن :

$$OP \times OI^2 = OP = IN^3$$

(2) نختار $OP = 2$ وبالتالي يكون $IN = \sqrt[3]{2}$.

اشرح كيف يمكن للمنحني اللبلاي - ديوكلي أن يحل

المشكل التالي : ليكن مكعباً ذي الحرف a ، أنشئ حرفاً

x لمكعب حيث يكون حجمه ضعف حجم المكعب الأول .

(104) (1) g هي الدالة المعرفة على $[0; \pi]$ بـ :

$$g(x) = x \cos x - \sin x$$

أ - أدرس تغيرات الدالة g وأنشئ جدول تغيراتها .

ب - استنتج إشارة $g(x)$ على $[0; \pi]$.

(2) لتكن الدالة f المعرفة على $[0; \pi]$ بـ :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ من أجل } x \neq 0 \text{ و } f(0) = 1$$

أدرس تغيرات الدالة f على $[0; \pi]$.

(3) الهدف من السؤال هو دراسة قابلية الاشتقاق عند 0 للدالة f .

أ - بين أنه من أجل كل عدد موجب x ،

$$0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$$

من أجل ذلك نعتبر الدالة φ المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

أحسب المشتقات المتتالية $\varphi'(x)$ ، $\varphi''(x)$ و $\varphi'''(x)$ واستنتج إشارة φ .

ب - برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 وأحسب $f'(0)$.

(4) أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f في معم متعامد ومتجانس حيث تأخذ وحدة الرسم $3cm$.

(105) (1) g هي الدالة المعرفة بـ :

$$g(0) = 0 \text{ و } g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ من أجل } x \neq 0$$

أ - برهن أن g تقبل الاشتقاق عند 0 .

ب - $\mathcal{C}$ هو منحني الدالة g الممثل في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. تحقق من أن محور الفواصل هو مماس للمنحني $\mathcal{C}$ عند المبدأ O .

(2) أ - برهن أن $g\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 0$ من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$.

ب - α عدد حقيقي موجب تماماً وصغير بقدر ما نريده . لماذا يوجد عدد غير منته من الأعداد $\frac{1}{k\pi}$ تنتمي إلى

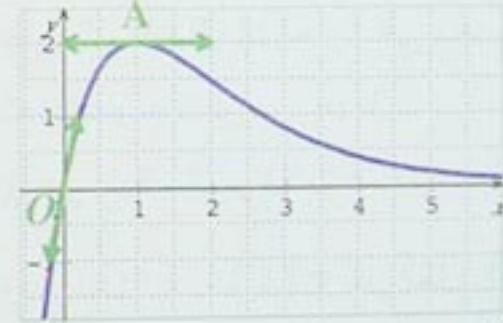
المجال $[0; \alpha]$ ، مع $k \in \mathbb{Z}$.

(3) هل صحيح أن مماس في نقطة A للمنحني $\mathcal{C}$ ، لا يقطع $\mathcal{C}$ إلا في النقطة A وهذا بجوار A .

106 في كل سؤال اقتراحات موضوعية يمكن أن تكون أكثر من جملة صحيحة؛ المطلوب اختيار الجمل الصحيحة مبرراً ذلك.

- (1) f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
- أ. إذا قبلت f قيمة حدية عظمى عند a من المجال I ، فإن $f'(a) = 0$.
- ب. إذا كانت $f'(a) = 0$ ، فإن f تقبل قيمة حدية عند a .
- ج. الدالة f مستمرة على المجال I .
- (2) f هي الدالة المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{x^3 - x + 1}$.
- أ. المعادلة $x^3 - x + 1 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$.
- ب. الدالة f متزايدة تماماً على $[\alpha; +\infty[$.
- ج. الدالة f تقبل الاشتقاق على $[\alpha; +\infty[$.
- د. من أجل كل عدد حقيقي موجب k ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلاً.

107 في الشكل $\mathcal{C}_f$ هو منحنى الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ومماسين عند كل من النقطتين O و A .



في كل السؤال، بالضبط اقتراح واحد صحيح المطلوب تعيينه.

- (1) العدد المشتق للدالة f عند 0 يساوي:
- أ. -2 . ب. 0 . ج. 1 . د. 4 .
- (2) أ. $f(0) = 2$. ب. $f(1) = 0$. ج. $f'(0) = 0$. د. $f'(1) = 0$.
- (3) أ. القيمة الحدية العظمى للدالة f هي 2 . ب. $f'(2) > 0$. ج. القيمة الحدية الصغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ هي 0 . د. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- (4) أ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. ب. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. ج. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. د. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1)$.

108 f دالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث يعطى جدول تغيراتها.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

- ميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة مبرراً ذلك.
- (1) من أجل كل $x \in]0; 1]$ ، $f(x) \leq 1$.
- (2) المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مماس لمنحنى الدالة f .
- (3) إذا كان $a > 1$ ، فإن $f(a) \leq 1$.
- (4) يكون مماس منحنى الدالة f عند نقطته ذات الفاصلة 1 موازياً لحامل محور الترتيب.
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

109 أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبرراً ذلك

(1) الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x\sqrt{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- (3) الدالة f المعرفة على $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ بـ $I = [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$:
- أ. $f(x) = 1 - \tan x$ متناقصة تماماً على I .
- (4) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^{13}$.

110 المطلوب التمييز بين الجمل الصحيحة والخاطئة مبرراً ذلك.

- (1) إذا كان $f'(2) = -4$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -4$.
- (2) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = f(\tan x)$ تقبل الاشتقاق على $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ولدينا $g'(x) = f'(\tan x)$.
- (3) المعادلة $\tan x = x$ تقبل ما لانهاية من الحلول على $\mathbb{R}$.
- (4) إذا كان $f' = g'$ على مجال I فإن $f - g$ هي دالة ثابتة على المجال I .

الكفاءات المستهدفة

- ♦ توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.
- ♦ حل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية، الدوال اللوغاريتمية.

تتدخل الدوال الأسية في مجالات عديدة علمية، اقتصادية و اجتماعية و يتم استعمالها لنمذجة الظواهر التي تكون فيها نسبة التغير $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ متناسبة مع y كما تسمح في الإحصاء من التعبير عن القوانين الأساسية.

زمن فاعلية دواء

حينما نحقن مريضا بمضاد حيوي فإن الكمية المحقونة A للدواء تتناقص مع مرور الزمن t وفق الدالة f حيث:

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{24}}$$

- (1) ما كمية الدواء المتبقية في الدم بعد مرور 8 ساعات ؟
- (2) لأسباب صحية تعطى كل 8 ساعات حقنة واحدة. مثل بيانيا كمية الدواء في دم المريض خلال 72 ساعة.
- (3) تبدأ فاعلية الدواء حينما تبلغ كميته في الدم $2,2A$. متى تبلغ هذه الحالة ؟
- (4) عندما تبلغ الكمية $3,65A$ يصبح الدواء خطرا على صحة المريض. هل الوتيرة السابقة في إعطاء الحقن تشكل خطرا على المريض ؟
- (5) بعد أسبوع من العلاج تقرر إعطاء الحقن كل 24 ساعة. مثل بيانيا التغيرات الجديدة لكمية الدواء في الدم لمدة أسبوع ابتداء من هذا التغير.

لن تجد أية صعوبة في نهاية الفصل للإجابة عن الأسئلة السابقة.

نشاط أول

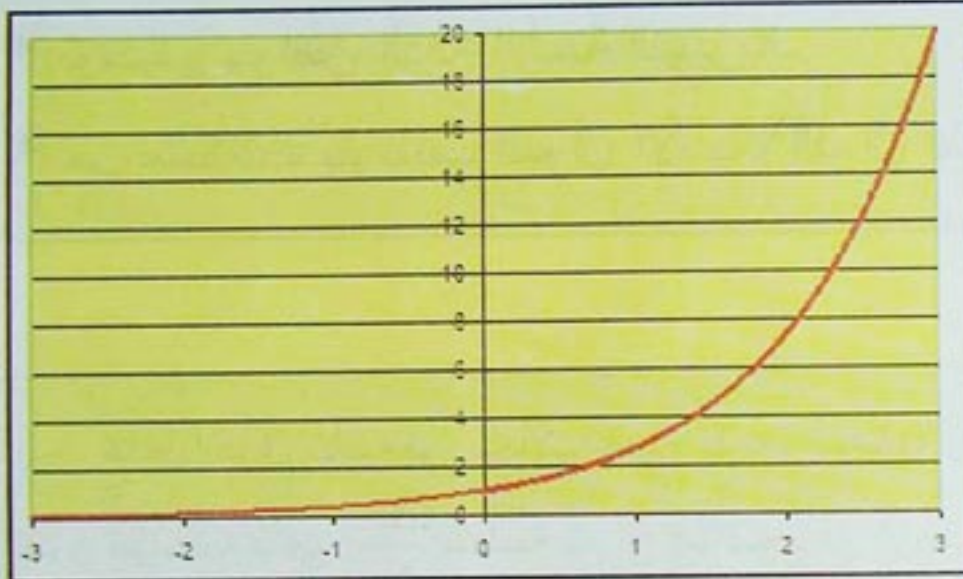
مقدمة: تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية و البيولوجية والاقتصادية و غيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f' . سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع و هي دالة تساوي دالتها المشتقة.

فرضية: نقبل أنه توجد دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين التاليين:

$$f'(x) = f(x) \quad (1) \quad \text{و} \quad f(0) = 1 \quad (2)$$

(1) باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h = 0,005$ أنجز جدولاً يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3; 3]$ ثم أنشئ تمثيلاً تقريبياً للدالة f .

نتذكر أن $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ و بما أن $f' = f$ فإن $f(x_0 + h) \approx f(x_0)(1 + h)$
لدينا كذلك $f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$ و بما أن $f' = f$ فإن $f(x_0 - h) \approx f(x_0)(1 - h)$



h	x	f(x-h)=f(x)*(1-h)	x	f(x+h)=f(x)*(1+h)
0,001	0	1	0	1
	-0.01	0.995	0.01	1.005
	-0.01	0.990025	0.01	1.010025
	-0.02	0.98014875	0.02	1.015075125
	-0.02	0.980149501	0.02	1.020150501
	-0.03	0.975248753	0.03	1.025251253
	-0.03	0.970372509	0.03	1.030377509
	-0.04	0.965520647	0.04	1.035529397
	-0.04	0.960693044	0.04	1.040707044
	-0.05	0.955889578	0.05	1.045910579
	-0.05	0.95111013	0.05	1.051140132
	-0.06	0.94635458	0.06	1.056395833
	-0.06	0.941622807	0.06	1.061677812
	-0.07	0.936914693	0.07	1.066986201

(2) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = f(x)f(-x)$

• بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$ (3)

• برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ (4)

(3) نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g' = g$ و $g(0) = 1$. بما أن الدالة f لا تتعدم على $\mathbb{R}$, نعتبر الدالة k

$$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

• بين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

• استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

(4) ليكن y عدد حقيقي كافي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $i(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

• بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $i(x) = f(y)$

• استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ (5)

• استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$, $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ (6)

(5) ليكن n عددا صحيحا نسبيا و لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $j(x) = \frac{f(nx)}{[f(x)]^n}$

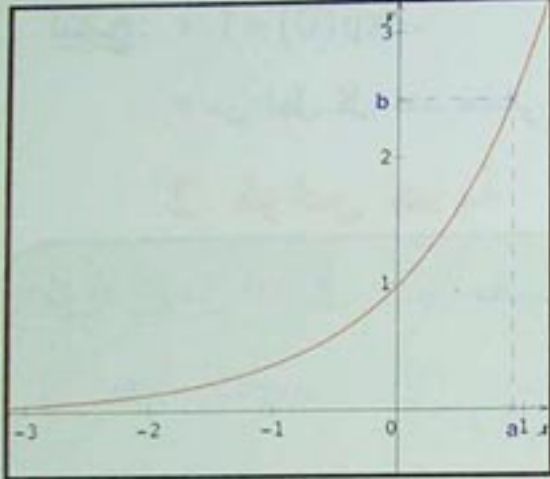
• عين الدالة المشتقة للدالة f .

• استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(nx) = [f(x)]^n$ (7)

تعريف: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = f$ و $f(0) = 1$ الدالة الأسية (النيبيرية).
و نرمز إليها بالرمز "exp".

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = \exp(x)$

(6) أكتب باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)، ...، (7).



نشاط ثان

الدالة الأسية مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

إن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، من أجل كل عدد حقيقي b من $]0; +\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $\mathbb{R}$ بحيث $e^a = b$.
بوضع $a = \ln(b)$ نكون بذلك قد عرفنا دالة جديدة.

تعريف: تسمى هذه الدالة "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" و نرمز إليها بالرمز "ln".

(1) حساب بعض الصور

- أحسب الأعداد التالية: $\ln(1)$ ، $\ln(e)$ ، $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\ln(e^2)$.
- عين قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln(2)$.
- بين أن $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

(2) التمثيل البياني

نعتبر في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدالتين "exp" و "ln".

- ماذا يمكن القول عن النقطتين $M(x; y)$ و $M'(y; x)$ حيث x, y عددان حقيقيان.
- a عدد حقيقي و b عدد حقيقي موجب تماما. بين أن النقطة $M(a; b)$ تنتمي إلى المنحني (C) إذا وفقط إذا كانت النقطة $M'(b; a)$ تنتمي إلى المنحني (C') .
- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C') ؟
- أرسم المنحني (C) ثم المنحني (C') في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(3) وضع تخمينات

- خمن اتجاه تغير الدالة "ln" على المجال $]0; +\infty[$.
- خمن نهايتي الدالة "ln" عند 0 و عند $+\infty$.

١. الدالة الأسية

١.1. عموميات

يسمح النشاط الأول من استخلاص النتائج التالية:

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = f$ و $f(0) = 1$. نرمز إلى هذه الدالة بالرمز $\exp$ و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ التي تحقق $y(0) = 1$.

نتائج: * $\exp(0) = 1$

* من أجل كل عدد حقيقي x ، $\exp'(x) = \exp(x)$

2. خواص جبرية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x, y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$\exp(x) \neq 0 \quad (1) \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad (2) \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad (3)$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (4) \quad \exp(nx) = [\exp(x)]^n \quad (5)$$

البرهان: أنظر النشاط الأول.

3. العدد e و الترميز e^x

- العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e = \exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e \approx 2,718281828$.
- من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$.
- لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\exp(n) = e^n$.
- اصطلاحاً نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x ، إلى $\exp(x)$ بـ e^x .

$$\exp(x) = e^x \quad \text{من أجل كل عدد حقيقي } x$$

تقرأ e^x : "أسية x ".

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عدداً صحيحاً. باستعمال الاصطلاح السابق نكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x, y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$e^0 = 1 \quad \exp'(x) = e^x \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

تمرين محلول 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. بين أن الدالة f فردية.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$

حل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{\frac{1 - e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$$

$$\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\frac{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}} = \frac{2\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\frac{2(e^{2x} + 1)}{(e^x + 1)^2}} = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \frac{(e^x + 1)^2}{(e^{2x} + 1)} \quad 2.$$

$$\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^{2x} + 1)} = \frac{(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)} = f(2x) \text{ و منه}$$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(-x) + f(x) = 2$. فسر بيانيا النتيجة.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$

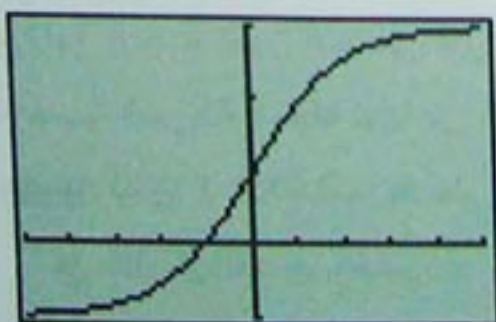
حل: ليكن x عددا حقيقيا.

$$f(-x) + f(x) = \frac{e^x(3e^{-x} - 1)}{e^x(e^{-x} + 1)} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} = 2$$

و منه $f(-x) + f(x) = 2$

المنحني الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0; 1)$.

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \quad 2.$$



لـ الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$

1. حلول المعادلة $f' = kf$

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = kf$ و $f(0) = 1$ هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$.

البرهان:

الوجود: لنكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{kx}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$ ، كما أن $f(0) = e^0 = 1$.
و بالتالي الدالة f تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$.

الوحدانية: نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g' = kg$ و $g(0) = 1$. نعتبر الدالة h المعرفة

على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{[f(x)]^2} = \frac{kg(x)f(x) - kf(x)g(x)}{[f(x)]^2} = 0$$

$$h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1. \text{ و منه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}, h(x) = 1. \text{ إذن من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}, g(x) = f(x).$$

2. دوال تحول المجموع إلى جداء

مبرهنة: الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين}$$

هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

البرهان:

• لنكن f دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: من أجل كل x, y من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y) = f(x)f(y)$.

بأخذ $x = 0$ و $y = 0$ نحصل على $f(0) = [f(0)]^2$ أي $f(0)[1 - f(0)] = 0$ أي $f(0) = 0$ أو $f(0) = 1$.

إذا كان $f(0) = 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = f(x) \times 0 = 0$ ، مما يعني

أن f معدومة و هذا مرفوض و بالتالي $f(0) = 1$.

من أجل كل y ثابت، لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y) = f(x)f(y)$. باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x

نحصل على: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x+y) = f'(x)f(y)$. من أجل $x = 0$ لدينا: $f'(y) = f'(0)f(y)$.

بوضع $k = f'(0)$ يكون لدينا من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $f'(y) = kf(y)$. إذن $f' = kf$ و $f(0) = 1$.

و منه حسب المبرهنة السابقة لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = e^{kx}$.

• **عكسيا:** لنكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{kx}$. باستعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية نحصل على:

$$f(x+y) = e^{k(x+y)} = e^{kx+ky} = e^{kx} \times e^{ky} = f(x)f(y), \quad x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين}$$

تمرين محلول:

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.

الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = kf$ هي الدوال: $x \mapsto Ce^{kx}$ حيث C عدد حقيقي ثابت.

1. أنجز برهانا لهذه المبرهنة.
2. عين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x) - 2f(x) = 0$.
3. من بين الدوال f حيث $f'(x) - 2f(x) = 0$ عين تلك التي منحناها البياني يمر من النقطة $A\left(\frac{1}{2}; e^2\right)$.

حل:

1. إذا كانت f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = Ce^{kx}$ فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد

$$f'(x) = C \times ke^{kx} = k(Ce^{kx}) = kf(x), \text{ حقيقي } x, \text{ منه } f' = kf.$$

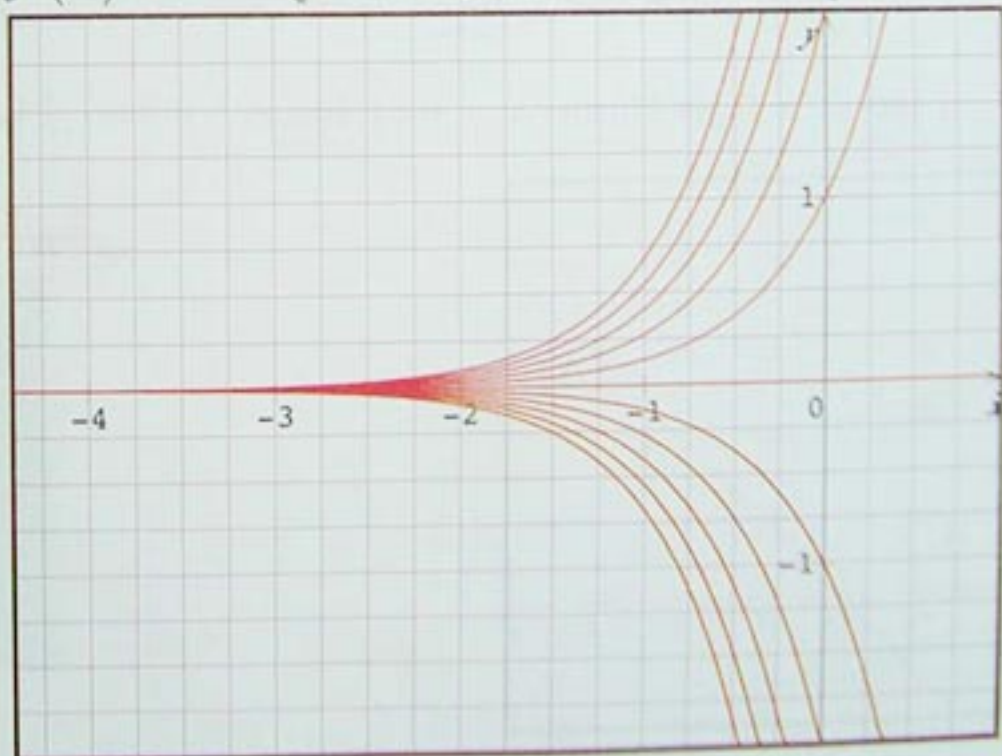
عكسيا إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = kf$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}}$

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^{kx} - kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}} = 0, \text{ و لدينا من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R},$$

و منه الدالة g ثابتة على $\mathbb{R}$. بوضع $g(x) = C$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $f(x) = g(x)e^{kx}$ يكون لدينا:
من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) = Ce^{kx}$.

2. $f'(x) - 2f(x) = 0$ تعني $f'(x) = 2f(x)$ و منه $f' = kf$ مع $k = 2$.

الدوال f هي إذن الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = Ce^{2x}$ حيث C عدد حقيقي ثابت.



التمثيلات المقابلة هي
لدوال f معرفة على $\mathbb{R}$
كما يلي: $f(x) = Ce^{2x}$

3. نبحث إذن عن الدالة f حيث $f(x) = Ce^{2x}$ مع $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^2$ و بما أن $f\left(\frac{1}{2}\right) = Ce^{2 \times \frac{1}{2}} = C \times e$

$$C \times e = e^2 \text{ أي } C = e, \text{ و منه } f(x) = e \times e^{2x} = e^{2x+1}.$$

إذن الدالة الوحيدة f حيث $f'(x) - 2f(x) = 0$ و التي يمر منحناها البياني من النقطة $A\left(\frac{1}{2}; e^2\right)$ هي الدالة:

$$x \mapsto e^{2x+1}$$

لدراسة الدالة الأسية

1. اتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية 1: من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ ، وبما أن $e^x \neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x > 0$.

خاصية 2: الدالة الأسية متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\exp'(x) = e^x$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\exp'(x) > 0$.

نتائج: • من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a < e^b$ يعني $a < b$ و $e^a = e^b$ يعني $a = b$.

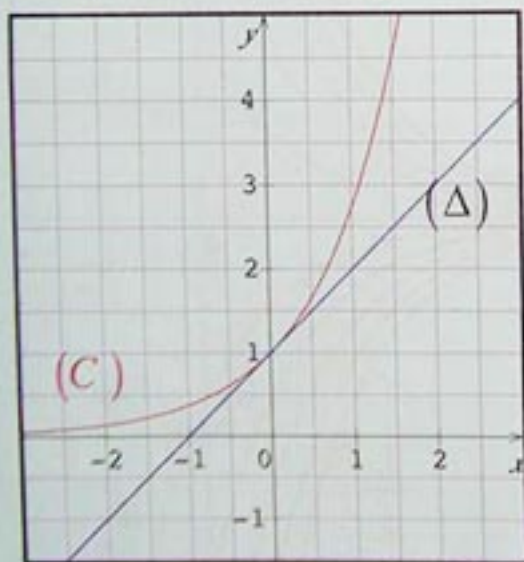
• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0 < e^x < 1$ يعني $x < 0$ و $e^x > 1$ يعني $x > 0$.

2. النهايات

خواص: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

البرهان:

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - x$ من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f'(x) = e^x - 1$ و بما أن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ $e^x \geq 1$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ و $f(0) = 1$ إذن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f(x) \geq 0$ أي $e^x \geq x$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.



3. جدول تغيرات - التمثيل البياني

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	
e^x	0	1	$+\infty$

- المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.
- لدينا $\exp'(0) = 1$ و $e^0 = 1$ إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً $y = x + 1$: (Δ).
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x} = \exp'(0) = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

نتيجة: الدالة $x \mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x \approx 1+x$

تمرين محلول 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$$(1) e^{2x} + 3 = 0 \quad (2) e^{-2x+1} - 1 = 0 \quad (3) e^{-2x-1} - e^x < 0 \quad (4) e^{2x} > 2 - e^{x^2}$$

طريقة: المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$

المتراجحة $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$ تعني $u(x) \geq v(x)$

حل:

(1) تعني $e^{2x} = -3$. هذه المعادلة لا تقبل حولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^{2x} > 0$. إذن $S = \emptyset$.

(2) تعني $e^{-2x+1} = 1$ أي $e^{-2x+1} = e^0$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S = \{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1} < e^x$ أي $-2x-1 < x$ أي $x > -\frac{1}{3}$ و منه $S =]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

(4) تعني $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$. بوضع $e^x = X$ نحصل على $X^2 + X - 2 \leq 0$

جزرا كثير الحدود $X^2 + X - 2$ هما -2 و 1 و منه $X^2 + X - 2 \leq 0$ تعني $X < -2$ أو $X > 1$

$X < -2$ تعني $e^x < -2$. هذه المتراجحة لا تقبل حولا في $\mathbb{R}$.

$X > 1$ تعني $e^x > 1$ أي $x > 0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S =]0; +\infty[$.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ و ليكن (C) منحنيتها البياني.

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C) .

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحني (C) معلم متعامد و متجانس.

حل: (1)

• لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و منه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

• نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

• لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

• لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$

نعلم أن $e^x < 1$ يعني $x < 0$ و $e^x > 1$ يعني $x > 0$

و بالتالي $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

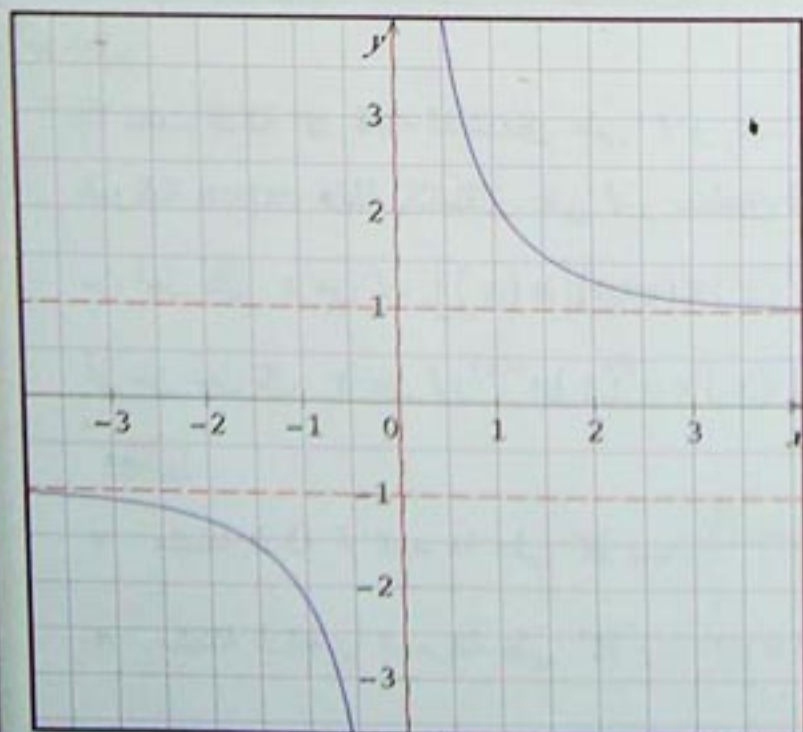
يقبل المنحني (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$$y = 1, y = -1, x = 0$$

(2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$

و لدينا $f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$



لدراسة الدالة $\exp \circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{-x+2}$.
- لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+2) = +\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
 - لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+2) = -\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+2} = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

البرهان:

نعلم أن الدالة "exp" متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

مثال:

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x^2-1}$.
- نلاحظ أن $f = \exp \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x) = x^2 - 1$.
- بما أن الدالة u متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ فإن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$.
- وبما أن الدالة u متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل

$$\text{كل } x \text{ من } I, (\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}.$$

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علماً أن الدالة "exp" قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } I, (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times (\exp)'[u(x)] = u'(x) \times (\exp)[u(x)]$$

$$\text{أي من أجل كل } x \text{ من } I, (\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}.$$

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

تمرين محلول 1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{-2x+3}$ أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

حل:

• لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x+3) = +\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+3} = +\infty$

و بالتالي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x+3) = -\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x+3} = 0$

و بالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{\frac{1}{3}x+1}$ و ليكن (C) منحنيا البياني. 1. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

2. عين نقط المنحنى (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{x}{3}$

حل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x+1}$

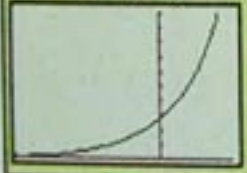
بما أن $e^{\frac{1}{3}x+1} > 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) > 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. يكون المماس عند نقطة من (C) فاصلتها x موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x) = \frac{1}{3}$

يكون لدينا إذن $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x+1} = \frac{1}{3}$ أي $e^{\frac{1}{3}x+1} = 1$ و هذا يعني $\frac{1}{3}x+1=0$ أي $x = -3$.

و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C) فاصلتها $x = -3$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ) .

تمرين محلول 3: المنحنى المرسوم على الحاسبة هو للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x^3+3x+1}$



WINDOW
Xmin=-1
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=10
Yscl=1
Xres=1

1. خمن عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$.

2. أثبت صحة تخمينك معينا حصرا للحل سعته 10^{-2} .

حل:

1. يظهر و أن للمعادلة $f(x) = 2$ حلا.

2. * الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

* الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = 3(x^2+1)e^{x^3+3x+1}$

و بما أن $3(x^2+1) > 0$ و $e^{x^3+3x+1} > 0$ فإن $f'(x) > 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. لدينا

$f(-1) = e^{-1} = 0,5$ و $f(0) = e = 2,71$. نلاحظ أن $f(-1) < 2 < f(0)$. إذن، حسب مبرهنة القيم

المتوسطة، المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين -1 و 0 . نعطينا الحاسبة $-0,11 < \alpha < -0,10$.

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. اللوغاريتم النيبيري لعدد

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$.
يسمى هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز " $\ln a$ " .

مثال: * العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 2$ هو إذن $\ln 2$.

2. تعريف الدالة " $\ln$ "

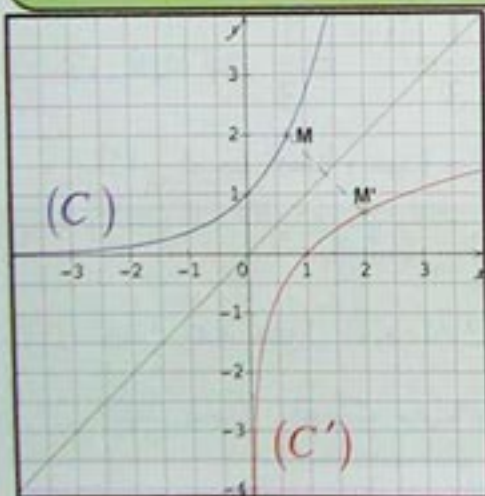
تعريف: نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\ln$ " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $x = e^y$ يعني $y = \ln x$.
2. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$.
3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^x) = x$.
4. بما أن $e^0 = 1$ فإن $\ln 1 = 0$ و بما أن $e^1 = e$ فإن $\ln e = 1$.

ملاحظة: نعبّر عن النتيجة "1" بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " $\exp$ ".

خاصية: في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).



البرهان: نرمز بـ (C) إلى منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ و بـ (C') إلى

منحنى الدالة $x \mapsto \ln x$.

بما أن $y = e^x$ يعني $x = \ln y$ فإن القول أن النقطة $M(x; y)$ تنتمي إلى (C) يعني أن النقطة $M'(y; x)$ تنتمي إلى (C') .

و بما أن $M(x; y)$ و $M'(y; x)$ متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ فإن المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى هذا المستقيم.

3. اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

خاصية: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

البرهان: a و b عدداً حقيقيين كفيين من $]0; +\infty[$ حيث $a < b$. يعني $e^{\ln a} < e^{\ln b}$ و بما أن الدالة

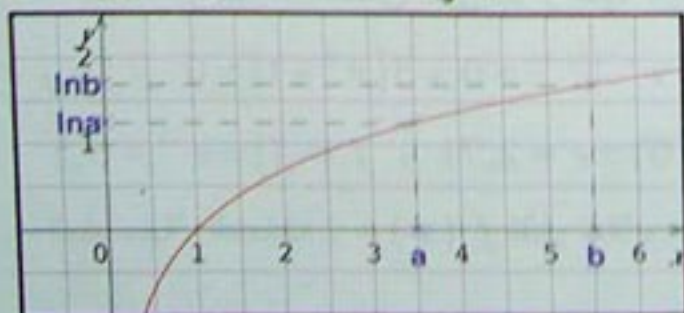
الأسية متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ فإن $\ln a < \ln b$.

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$:

1. $\ln a = \ln b$ يعني $a = b$.

2. $\ln a < \ln b$ يعني $a < b$.

3. $\ln a > 0$ يعني $a > 1$ و $\ln a < 0$ يعني $0 < a < 1$ كما أن $\ln 1 = 0$.



تمرين محلولة 1: عين مجموعتي تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{و} \quad g(x) = \ln(x^2)$$

طريقة: يكون $\ln a$ معنى إذا و فقط إذا كان العدد الحقيقي a موجب تاماً.

حل:

- تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+1 > 0$ أي $x > -1$ و منه مجموعة تعريف f هي $]-1; +\infty[$.
- تكون g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2 > 0$ أي $x \neq 0$ و منه مجموعة تعريف g هي $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

تمرين محلولة 2: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$$\ln(2x-1) = 2 \quad (1) \quad \ln(x-1) \geq -3 \quad (2) \quad \ln(x+2) \leq 5 \quad (3)$$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $\ln[u(x)] = p$ (على التوالي متراجحة من الشكل $\ln[u(x)] < p$):

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x) = e^p$ (على التوالي المتراجحة $u(x) < e^p$).

حل:

1. لدينا $D =]\frac{1}{2}; +\infty[$. (1) تعني $2x-1 = e^2$ أي $x = \frac{1+e^2}{2}$ و منه مجموعة الحلول هي $S = \left\{ \frac{1+e^2}{2} \right\}$.
2. لدينا $D =]1; +\infty[$. (2) تعني $x-1 > e^{-3}$ أي $x > 1+e^{-3}$ و منه مجموعة الحلول هي $S =]1+e^{-3}; +\infty[$.
3. لدينا $D =]-2; +\infty[$. (3) تعني $x+2 \leq e^5$ أي $x \leq e^5 - 2$ و منه مجموعة الحلول هي $S =]-2; e^5 - 2]$.

تمرين محلولة 3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$\ln(x^2-1) = \ln(x) \quad (1) \quad \ln(x^2-1) \leq \ln(x) \quad (2)$$

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)] < \ln[v(x)]$):

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x) < v(x)$).

حل:

1. تكون المعادلة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2-1 > 0$ و $x > 0$ و منه $D =]1; +\infty[$.
- (1) تعني $x^2-1 = x$ أي $x^2-x-1=0$. حلول المعادلة $x^2-x-1=0$ هما $x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D . و هكذا مجموعة الحلول هي $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.
2. مجموعة تعريف المتراجحة هي $D =]1; +\infty[$. لدينا (2) تعني $x^2-x-1 \leq 0$. مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x-1 \leq 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$ و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (2) هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$. نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$.

لـ الخواص الجبرية

1. الخاصية الأساسية

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ، $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

البرهان: a و b عدنان حقيقيان من $]0; +\infty[$. نضع $\alpha = \ln(ab)$ و نضع $\beta = \ln a + \ln b$ و بالتالي:

$$e^\alpha = ab \text{ و } e^\beta = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab \text{ إذن } e^\alpha = e^\beta \text{ و منه } \alpha = \beta \text{ أي } \ln(ab) = \ln a + \ln b .$$

2. نتائج

نتيجة 1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

البرهان:

$$* \text{ من أجل } a \text{ من }]0; +\infty[, a \times \frac{1}{a} = 1 , \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0 \text{ و منه } \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \text{ أي } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \text{ و منه } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$* \text{ من أجل } a \text{ و } b \text{ من }]0; +\infty[, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماماً و هكذا يكون لدينا:

$$\text{من أجل كل أعداد حقيقية } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ من }]0; +\infty[, \ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$$

نتيجة 2: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(a^n) = n \ln a$.

البرهان: a عدد حقيقي من $]0; +\infty[$ و n عدد صحيح نسبي.

نميز الحالات التالية:

1. الحالة الأولى: $n \geq 0$

نستعمل البرهان بالتراجع. و من أجل ذلك نسمي $P(n)$ الخاصية $\ln(a^n) = n \ln a$.

- من أجل $n = 0$ لدينا: $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \ln a$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.
 - **فرضية التراجع:** نفرض صحة $P(n)$ من أجل n حيث $n \geq 0$ أي $\ln(a^n) = n \ln a$.
 - **وراثية الخاصية ابتداء من الرتبة 0:** نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\ln(a^{n+1}) = (n+1) \ln a$. لدينا:
- $$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln a = n \ln a + \ln a = (n+1) \ln a$$
- و منه $P(n+1)$ صحيحة.
- الخلاصة:** من أجل كل عدد طبيعي n ، $\ln(a^n) = n \ln a$.

2. الحالة الثانية: $n < 0$

$$\text{لأن } -n > 0 \text{ فإن } \ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n) \ln a = n \ln a$$

نتيجة 3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ ، $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

البرهان: من أجل a من $]0; +\infty[$ ، $\ln a = \ln\left[(\sqrt{a})^2\right] = 2 \ln(\sqrt{a})$ ، و منه $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

تمرين محلول 1: حل المعادلتين التاليتين:

$$\ln(x-1) + \ln(x+2) = 2\ln 2 \quad (2) \quad \text{و} \quad \ln(x-1)(x+2) = 2\ln 2 \quad (1)$$

طريقة: الكتابة $\ln a + \ln b$ تفرض أن يكون $a > 0$ و $b > 0$ بينما الكتابة $\ln(a \times b)$ تفرض أن يكون $ab > 0$ و يعني هذا أنه يمكن للعديدين a و b أن يكونا سالبين معا.

حل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)(x+2) > 0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2) = \ln 4$ أي $(x-1)(x+2) = 4$ أي $x^2 + x - 6 = 0$ أي -3 و 2 حلول هذه المعادلة تنتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S = \{-3; 2\}$.

2. تكون المعادلة (2) معرفة من أجل من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1) > 0$ و $(x+2) > 0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D =]1; +\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2) = \ln 4$ أي $(x-1)(x+2) = 4$ أي $x^2 + x - 6 = 0$ من بين -3 و 2 حلول هذه المعادلة، الحل 2 هو الوحيد الذي ينتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S = \{2\}$.

تمرين محلول 2: حل المتراجحتين التاليتين:

$$\ln(x-1) + \ln(x+2) \leq 2\ln 2 \quad (2) \quad \text{و} \quad \ln(x-1)(x+2) \leq 2\ln 2 \quad (1)$$

طريقة: لمعاينة حلول متراجحة يمكنك استعمال محور.

حل:

1. مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي $D =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2) \leq \ln 4$ أي $x^2 + x - 6 \leq 0$

مجموع الحلول هي $[-3; 2] \cap D = [-3; -2[\cup]1; 2]$

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D =]1; +\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2) \leq \ln 4$ أي $x^2 + x - 6 \leq 0$

مجموع الحلول هي $[-3; 2] \cap D =]1; 2]$

تمرين محلول 3: حل المعادلة التالية: $2[\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6 = 0$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = 0$ مع $a \neq 0$ نضع $X = \ln x$.
نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

حل: مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]0; +\infty[$.

بوضع $X = \ln x$ نحصل على المعادلة $2X^2 + X - 6 = 0$ ذات الحلين -2 و $\frac{3}{2}$.

$\ln x = -2$ تعني $x = e^{-2}$ و $\ln x = \frac{3}{2}$ تعني $x = e^{\frac{3}{2}}$ و منه مجموعة الحلول هي $S = \{e^{-2}; e^{\frac{3}{2}}\}$

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. النهايات

خواص: نهاية الدالة "ln" عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad (2) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad (1)$$

البرهان:

- ليكن A عددا حقيقيا موجبا تماما. الدالة "ln" متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و منه إذا كان x عددا حقيقيا يحقق $x > e^A$ فإن $\ln x > A$ و هكذا فإن المجال $]A; +\infty[$ يشمل كل قيم $\ln x$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. و هذا يعني أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

- من أجل x من $]0; +\infty[$ ، نضع $X = \frac{1}{x}$ و منه $\ln X = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = +\infty$.

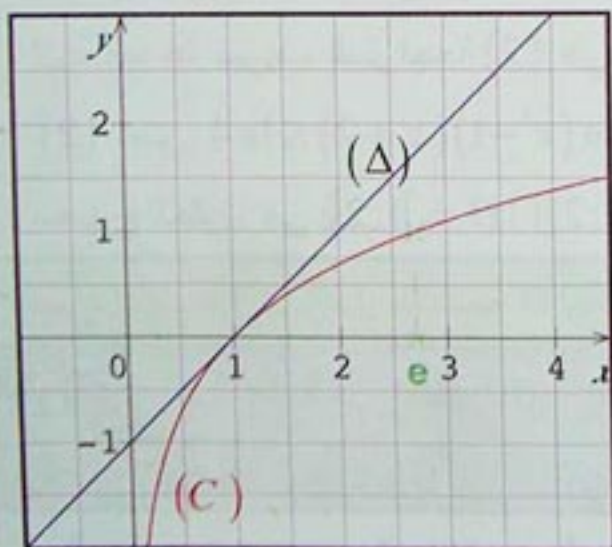
و من النتيجة (1) لدينا: $\lim_{X \rightarrow +\infty} (-\ln X) = -\infty$ و هكذا فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

2. الاستمرارية و الاشتقاقية

خواص: الدالة "ln" مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

البرهان:

- نقبل بدون برهان أن الدالة "ln" مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$.
- لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = e^{\ln x}$. هي مركب الدالة "ln" متبوعة بالدالة "exp" فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و لدينا $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x}$ و بما أن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$ ، فإن $f'(x) = \ln'(x) \times x$ من جهة و $f'(x) = 1$ (بما أن $f(x) = x$) من جهة ثانية. نستنتج هكذا أن $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.



3. جدول تغيرات الدالة "ln"

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		+	
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

المنحني (C) الممثل للدالة "ln" يقبل محور الترتيب كمستقيم مقارب.

لدينا $\ln(1) = 0$ و $\ln'(1) = 1$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $y = x - 1$: (Δ).

من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = 1$ إذن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ أو $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

نتيجة: الدالة $h \mapsto h$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $h \mapsto \ln(1+h)$ بجوار 0.

أي من أجل h قريب من 0 لدينا: $\ln(1+h) \approx h$.

تمرين محلول 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

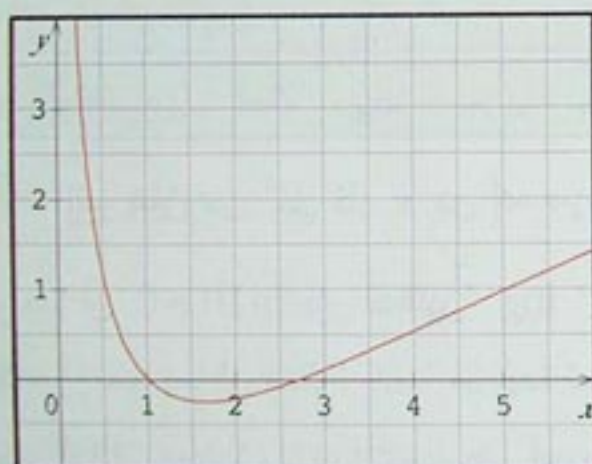
1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.
2. عين الدالة f' . أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
3. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

حل:

1. نعلم أن $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ و منه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$.
لدينا $f(x) = \ln x [(\ln x) - 1]$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. بما أن الدالة $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (2 \ln x - 1)$ ، بما أن $x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(2 \ln x - 1)$. لدينا $2 \ln x - 1 \geq 0$ تعني $\ln x \geq \frac{1}{2}$ أي $x \geq e^{\frac{1}{2}}$ ومنه:

- من أجل كل x من $]0; e^{\frac{1}{2}}[$ ، $f'(x) \leq 0$ و بالتالي f متناقصة تماماً على $]0; e^{\frac{1}{2}}[$.
- من أجل كل x من $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ ، $f'(x) \geq 0$ و بالتالي f متزايدة تماماً على $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

3. باستعمال قيم مساعدة نحصل على التمثيل البياني للدالة f .



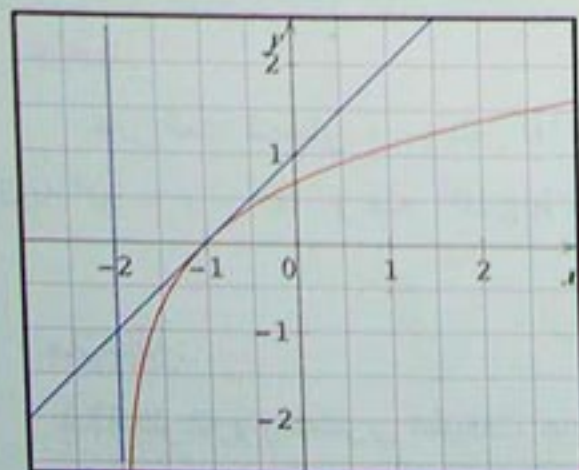
x	$f(x)$
-0,5	
1	
e	
3	
4	
5	

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x+2)$ و ليكن (C_f) تمثيلها

البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

عين نقطة (C_f) التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم ذو المعادلة $y = x$. أرسم (C_f) وهذا المماس.



حل: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-2; +\infty[$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x موازياً لـ $y = x$: (Δ) لما

يكون $f'(x) = 1$ أي $\frac{1}{x+2} = 1$ و منه $x = -1$ مع $f(-1) = 0$

معادلة المماس عند النقطة $A(-1; 0)$ هي: $y = x + 1$

(C_f) هو صورة منحنى الدالة $\ln$ بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.

دالة اللوغاريتم العشري

1. دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز "log" و المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظة: $\log 1 = 0$ و $\log 10 = 1$.

2. خواص

خاصية 1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ، $\log(ab) = \log a + \log b$.

البرهان: a و b عدنان حقيقيان من $]0; +\infty[$ لدينا:

$$\log(ab) = \frac{\ln(ab)}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} + \frac{\ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$$

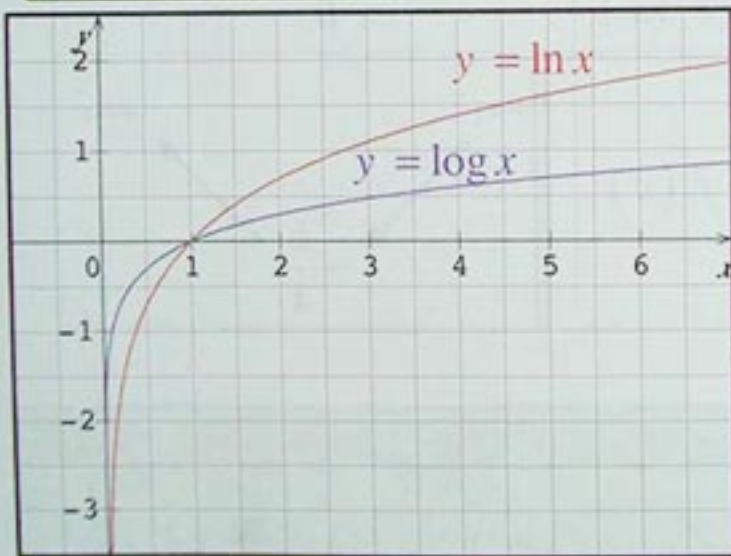
نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة "ln" تبقى محققة من قبل الدالة "log" ومنه:

$$1. \text{ من أجل كل عددين حقيقيين } a \text{ و } b \text{ من }]0; +\infty[, \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$2. \text{ من أجل كل عدد حقيقي } a \text{ من }]0; +\infty[\text{ و من أجل كل عدد صحيح نسبي } n , \log(a^n) = n \log a$$

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\log(10^n) = n$ لأن $\log 10 = 1$.

خاصية 2: الدالة "log" متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.



البرهان: من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\log x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$

و بما أن $\ln 10 > 0$ فإن للدالتين "log" و "ln" نفس اتجاه

التغيرات. و بما أن الدالة "ln" متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$

فإن الدالة "log" متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

يستنتج التمثيل البياني للدالة "log" انطلاقاً من التمثيل البياني للدالة "ln".

نتيجة: إذا كان x عدداً حقيقياً حيث $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن $n \leq \log x \leq n+1$

مثال:

نعتبر العدد الحقيقي x بحيث $x = 3,87 \times 10^7$

لدينا $10^7 < x < 10^8$ و منه $\log 10^7 < \log x < \log 10^8$

نجد هكذا أن $7 < \log x < 8$

ملاحظة:

لدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة و هامة في مختلف المواد و بصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء و الجغرافيا.

تمرين محلول 1: نعتبر العدد الطبيعي n حيث: $n = 3^{10518}$

1. عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.
2. استنتج الحصر التالي: $10^{5018} \leq n < 10^{5019}$.
3. حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n .

حل:

قدرة ذاكرة الحاسبات لا
تسمح باعتبار أعداد
كبيرة جداً بقدر العدد n .

1. لدينا $\log(3^{10518}) = 10518 \log 3$. تعطي الحاسبة:
 $E(10518 \log 3) = 5018$
2. من $E(\log n) = 5018$ نستنتج الحصر: $5018 \leq \log n < 5019$
و يمكن كتابة هذا الحصر كما يلي: $\log(10^{5018}) \leq \log n < \log(10^{5019})$
و بما أن الدالة $\log$ متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ فإن $10^{5018} \leq n < 10^{5019}$.
3. يثبت الحصر السابق أن الكتابة العشرية للعدد n تتكون من 5019 رقماً.

تمرين محلول 2: التركيز المولي (المولارية) بشوارد H^+ لمحلول و الذي نرسم إليه بـ $[H^+]$ هو عدد مولات H^+ في 1 لتر من هذا المحلول. نعبّر غالباً عن هذا التركيز بأُس عشري سالب: $[H^+] = 10^{-pH}$ إلا أنه يفضل استعمال pH المعروف بالعلاقة: $pH = -\log[H^+]$.

1. ما قيمة pH محلول يحتوي على 5×10^{-8} moles من شوارد H^+ في اللتر الواحد؟
2. ما هو التركيز المولي بشوارد H^+ لمحلول متعادل ($pH = 7$)؟

حل:

1. لدينا $[H^+] = 5 \times 10^{-8}$ و منه $pH = -\log[5 \times 10^{-8}]$ أي $pH = -[\log 5 + \log(10^{-8})]$
و بالتالي: $pH = -\log 5 + 8$. نجد هكذا: $pH \approx 7,3$.
2. ($pH = 7$) يعني $-\log[H^+] = 7$ أي $\log[H^+] = -7$ و منه $[H^+] = 10^{-7}$ moles.

تمرين محلول 3: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$$\log x = 2 \quad (1) \quad \log x \leq -4 \quad (2) \quad \log x > 3 \quad (3)$$

حل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل x من $]0; +\infty[$.
2. $\log x = 2$ تعني $\log x = \log(10^2)$ أي $x = 10^2$. إذن مجموعة الحلول هي: $S = \{10^2\}$.
2. تكون المتراجحة (2) معرفة من أجل كل x من $]0; +\infty[$.
- $\log x \leq -4$ تعني $\log x \leq \log(10^{-4})$ و بما أن الدالة $\log$ متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ فإن $x \leq 10^{-4}$. إذن مجموعة الحلول هي: $S =]0; 10^{-4}]$.
3. تكون المتراجحة (3) معرفة من أجل كل x من $]0; +\infty[$.
- $\log x > 3$ تعني $\log x > \log(10^3)$ و بما أن الدالة $\log$ متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ فإن $x > 10^3$. إذن مجموعة الحلول هي: $S =]10^3; +\infty[$.

لدراسة الدالة $\ln \circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\ln \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x-2)$.

- لدينا $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = -\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$
- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماماً على مجال I فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

البرهان:

نعلم أن الدالة $\ln$ متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f = \ln \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $u(x) = \frac{3}{x-1}$.

بما أن الدالة u متناقصة تماماً على المجال $]1; +\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]1; +\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماماً على مجال I فإن الدالة $\ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على I

$$\text{و لدينا من أجل كل } x \text{ من } I, (\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق و موجبة تماماً على I و علماً أن الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

فإن الدالة المركبة $\ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } I, (\ln \circ u)'(x) = u'(x) \times (\ln)'[u(x)] = u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$$

$$\text{أي من أجل كل } x \text{ من } I, (\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

مثال: * مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ هي $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

* مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \ln(e^x + 1)$ هي $g'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

تمرين محلول 1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)$ أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

حل:

- لدينا من جهة: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow 2} \ln X = \ln 2$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 + 1) = \ln 2$
- و لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 - 1) = -\infty$
- نستنتج مما سبق أن $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)] = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ لدينا إذن حالة عدم التعيين.
- من أجل كل x من $]1; +\infty[$ ، $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$ بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = 1$ و علما أن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln X = 0$ نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بـ $f(x) = x + 3\ln(2x - 1)$

1. أحسب $f'(x)$

2. عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

حل:

1. من أجل كل x من $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، $f'(x) = 1 + 3 \times \frac{2}{2x - 1} = \frac{2x + 5}{2x - 1}$.
2. لدينا: $f(1) = 1$ و $f'(1) = 7$ لدينا $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $y = 7x - 6$ (Δ) .

تمرين محلول 3: جدول التغيرات المقابل هو لدالة u

استنتج جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-3; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \ln[u(x)]$$

x	-3	1	$+\infty$
$u(x)$	3	e	$+\infty$

حل: نلاحظ من جدول تغيرات الدالة u أنه من أجل كل x من $[-3; +\infty[$ ، $u(x) \geq 0$ و منه فالدالة u موجبة تماما على المجال $[-3; +\infty[$. إذن للدالتين u و $f = \ln \circ u$ نفس مجموعة التعريف. نعلم بالإضافة إلى ذلك أن لهما نفس اتجاه التغير. لدينا $f(-3) = \ln[u(-3)] = \ln 3$ و $f(1) = \ln[u(1)] = \ln e = 1$

x	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	$\ln 3$	1	$+\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$

فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = +\infty$

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً λ ، نعتبر الدوال f_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

نرمز بـ (C_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال f_λ في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانياً النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (C_1) ، (C_2) و (C_3) .
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_λ) و $(C_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً λ ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$$

نرمز بـ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانياً النتيجة.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) .
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

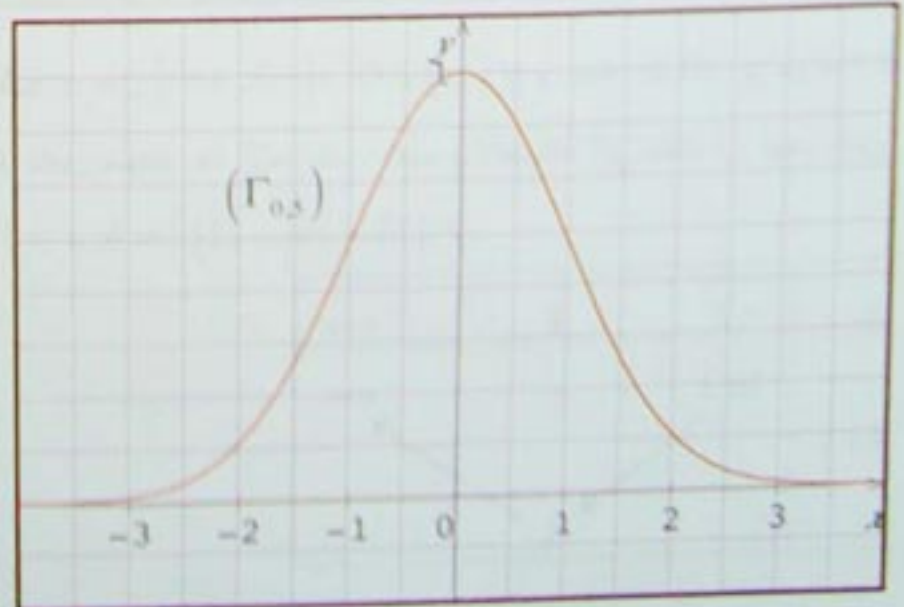
ملاحظة: تسمى المنحنيات (Γ_λ) بمنحنيات غوص (Gauss) و يتم استعمالها في الاحتمالات و الإحصاء

و لحل أكثرها استعمالاً هو المنحني $(\Gamma_{0.5})$ ذو المعادلة $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ و الذي يأخذ شكلاً ناقوسياً.



كارل فريدريك غوص

1777 م - 1855 م



المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو تعيين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = af(x) + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان مع $a \neq 0$.

ملاحظة: العديد من المسائل في العلوم التجريبية، الاقتصاد، الكهرباء و الميكانيك تؤدي إلى دراسة هذا النوع من

المعادلات التفاضلية و التي غالبا ما نكتبها على الشكل: $\frac{dy}{dx} = ay + b$

1. المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$

مبرهنة: a عدد حقيقي غير معدوم.

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كفي.

البرهان: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E) \quad y' = ay$ حيث $a \neq 0$

• أثبت أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي هي حل للمعادلة التفاضلية (E) .

• نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E) . أثبت أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = e^{-ax} g(x)$ دالة ثابتة. استنتج أن $g(x) = Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كفي.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $3y' - 2y = 0$.

2. المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$

مبرهنة: a و b عدنان حقيقيان مع a غير معدوم.

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كفي.

البرهان: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E') \quad y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$

• أثبت أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي كفي هي حل للمعادلة (E') .

• نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E') . لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = g(x) + \frac{b}{a}$

- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $h'(x) = ah(x)$.

- استنتج من مبرهنة الجزء 1 عبارة $h(x)$ و من ثم عبارة $g(x)$.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 3$.

خاصية: من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية $(x_0; y_0)$ ، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تقبل حلا وحيدا f معرفة على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرط: $f(x_0) = y_0$.

البرهان: إذا كانت $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ بين أن $C = e^{-ax_0} \left(y_0 + \frac{b}{a} \right)$.

تطبيق: نعتبر المعادلة التفاضلية (1) $2y' + y = 1$

1. حل المعادلة (1).

2. عين الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(-1) = 2$.

3. أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم في معلم متعامد و متجانس تمثيلها البياني.

تعريف: نسمي الدالة تجب الزائدية و الدالة جيب الزائدية الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ و اللتين نرمز إليهما على التوالي بـ ch و sh حيث:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. دراسة الدالة ch

- بين أن الدالة ch دالة زوجية.
- أدرس نهاية الدالة ch عند $+\infty$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة ch على المجال $[0; +\infty[$. شكل جدول تغيراتها.

2. دراسة الدالة sh

- بين أن الدالة sh دالة فردية.
- أدرس نهاية الدالة sh عند $+\infty$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة sh على المجال $[0; +\infty[$. شكل جدول تغيراتها.

3. التمثيلات البيانية

ليكن، في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$ ، (C_c) و (C_s) التمثيلين البيانيين للدالتين ch و sh على الترتيب.

- أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_c) و (C_s) .
- أدرس نهاية الدالة $f: x \mapsto ch(x) - sh(x)$ عند $+\infty$. ما ذا تستنتج؟

تعريف: القول عن منحنيين (C_f) و (C_g) ممثلين على التوالي لدالتين f و g أنهما متقاربان عند $+\infty$ ($-\infty$)

$$\text{يعني أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \right)$$

- أرسم في نفس المعلم المنحنيين (C_c) و (C_s) .

4. دساتير

- بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$$

$$sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a)$$

- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا:

$$sh(2a) = 2sh(a)ch(a) \quad \text{و} \quad ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a)$$

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch^2(a) - sh^2(a) = 1$

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch(2a) = 2ch^2(a) - 1$

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch(2a) = 2sh^2(a) + 1$

التمثيل البياني لدوال مرفقة بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

1. بالنسبة لكل دالة من الدوال التالية اشرح كيف يتم الحصول على منحنيتها البياني (C) انطلاقا من التمثيل

البياني (Γ) للدالة اللوغاريتمية النيبيرية ثم أرسم (C).

(أ) $f(x) = 1 + \ln x$ (ب) $g(x) = -\ln x$

(ج) $h(x) = \ln(x+2)$ (د) $k(x) = 1 + \ln(x-1)$

2. نعتبر الدالتين φ و ψ المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$\varphi(x) = \ln(|x|)$ و $\psi(x) = |\ln(|x|)|$

نرمز إلى منحنيهما البيانيين على التوالي بـ (C_φ) و (C_ψ) .

• بين أن المنحني (C_φ) متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب ثم أرسمه.

• أرسم المنحني (C_ψ) انطلاقا من المنحني (C_φ) .

دراسة دالة تتضمن عبارتها اللوغاريتم النيبيري

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α . تحقق أن $1 < \alpha < 2$.

4. باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا للعدد α سعته 0,01.

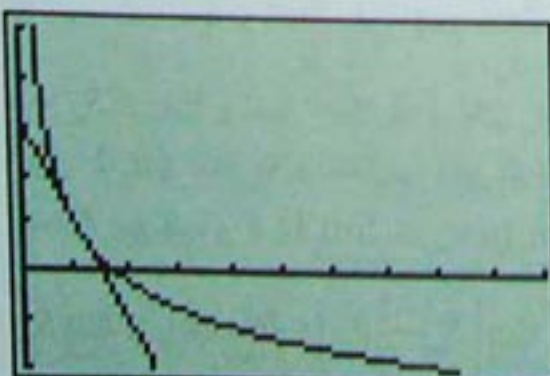
5. ليكن (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 1.

• عين معادلة للمماس (Δ) و أكتبها على الشكل: $y = ax + b$.

• أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = f(x) - (ax + b)$.

• استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المماس (Δ).

6. ارسم المماس (Δ) و المنحني (C).



X	Y1
1.73	.02991
1.74	.02083
1.75	.01181
1.76	.00287
1.77	-.006
1.78	-.0148
1.79	-.0236

TABLE SETUP	
TblStart=	1.7
ΔTbl=	.01
Indent:	Auto Ask
Depend:	Auto Ask

تمرين : بكالوريا

1. f و g دالتان معرفتان على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \text{ و } f(x) = \ln(1+x) - x$$

1. ادرس تغيرات كل f و g على $[0; +\infty[$.

2. استنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II. نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفة

$$u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ و } u_1 = \frac{3}{2}$$

1. برهن بالتراجع أن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$3. \text{ نضع } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{و } T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

باستعمال الجزء I، بين أن: $S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

4. احسب S_n و T_n بدلالة n . استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

5. أ- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة، لتكن ℓ نهايتها.

ج- نقبل النتيجة التالية: "إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $v_n \leq w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ "

• بين إذن أن: $1 \leq \ln \ell \leq \frac{5}{6}$. استنتج حصر ℓ .

حل مختصر

I. 1. لدينا $f'(x) = \frac{-x}{1+x}$ ، الدالة f متناقصة على $[0; +\infty[$ و $f(0) = 0$ ،

و منه f سالبة، من جهة أخرى $g'(x) = \frac{x^2}{1+x}$ ، إذن الدالة g متزايدة على $[0; +\infty[$ و $g(0) = 0$ ، ومنه g موجبة

2. من f سالبة نستنتج أن $\ln(1+x) \leq x$ و من g موجبة نستنتج أن:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ و بالتالي}$$

$$\text{II. 3. } \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^2} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2} \text{ و } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{و } \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^n} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} \dots, \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^3} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \leq \frac{1}{2^3}$$

بجمع هذه المتباينات طرفا إلى طرف نحصل على $S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

$$4. S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ و } T_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{3} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

5. أ- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ و منه (u_n) متزايدة تماما.

ب- $\ln u_n \leq S_n$ و منه $u_n \leq e^{S_n}$ و لكن S_n محدودة من الأعلى بـ 1 بالتالي $u_n \leq e$ إذن (u_n) متقاربة و تتقارب نحو نهاية ℓ .

ج- ℓ موجب و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \ell$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{1}{2} T_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \text{ و منه } \frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1 \text{ أي } e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq e$$

تعاليق

• f' سالبة على $[0; +\infty[$

• g' موجبة على $[0; +\infty[$

II 1. و 2 نستعمل قاعدة البرهان بالتراجع.

4. S_n مجموع n حدا لمتتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $\frac{1}{2}$.

T_n مجموع n حدا لمتتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الأول $\frac{1}{4}$.

• $u_n > 0$

• (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى

• الدالة $\ln$ مستمرة على $[0; +\infty[$

تنبيه

عندما نريد معرفة إشارة دالة نلجأ أحيانا إلى دراسة تغيراتها دون أن نحسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها كما هو الشأن في السؤال 1 من التمرين. الهدف هنا هو توظيف هذه الإشارة لدراسة تغيرات دالة أخرى و هي الدالة المعرفة في السؤال 2 من التمرين.

تمرين:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي: $g(x) = (1-x)e^x - 1$
 - أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها (لا يطلب حساب النهايات).
 - ب- استنتج إشارة $g(x)$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \leq \frac{1}{1-x}$
2. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي: $f(x) = e^x + \ln(1-x)$
 - أ- اشرح لماذا الدالة f معرفة على $]-\infty; 1[$ ؟
 - ب- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند 1 .
 - ج- ادرس تغيرات الدالة f . (يمكن استعمال نتائج السؤال 1)
 - د- ارسم بدقة المنحني (c) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

توجيهات

1. أ- طبق عملية مشتق جداء دالتين.
- ب- لمعرفة إشارة $g(x)$ ليس من الضروري حساب نهايات g عند $-\infty$ و عند 1 .
و لا تنس تحديد القيم الحدية للدالة g .
2. أ- الدالة $\ln$ معرفة على $]0; +\infty[$.
3. ج- إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة $g(x)$ على $]-\infty; 1[$.
- د- ارسم المستقيمات المقاربة في حالة وجودها و أبرز القيم الحدية.

1 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف الدالة f للمتغير الحقيقي x :

$$f(x) = e^{x^2+x} \quad (2) \quad ; f(x) = e^{-x} \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad (4) \quad ; f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$f(x) = e^x - e^{-x} \quad (6) \quad ; f(x) = \frac{1}{xe^x} \quad (5)$$

2 بسط العبارات التالية:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} \quad (3) \quad , \quad \frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} \quad (2) \quad , \quad (e^x)^3 \times e^{-5x} \quad (1)$$

3 بين من أجل كل عدد حقيقي x ما يلي:

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \quad (2) \quad \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (1)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (4) \quad (e^x + e^{-x})^2 = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}} \quad (3)$$

4 u متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$u_n = \frac{e^{n-1}}{e^n} \quad n \rightarrow \infty$$

• بين أن u متتالية ثابتة.

5 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$e^x = e^{-2x} \quad (3) \quad , \quad e^{-5x} = e \quad (2) \quad , \quad e^{2x} = 1 \quad (1)$$

6 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التاليتين:

$$e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}} \quad (2) \quad e^{-x^2} = \frac{1}{e} \quad (1)$$

7 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\frac{x+4}{e^{6-x}} = e^{\frac{1}{x}} \quad (2) \quad , \quad e^{x^2} = e^{-8(x+1)} \quad (1)$$

$$e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \quad (3)$$

8 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$e^x < e^{-2x} \quad (3) \quad , \quad e^x > e^2 \quad (2) \quad , \quad e^{3x} \leq 1 \quad (1)$$

9 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$e^{x+1} > e^{\frac{2}{x}} \quad (2) \quad e^{2x^2} \leq e^{5x+3} \quad (1)$$

$$e^{x-x^2} \geq 1 \quad (4) \quad e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x} \quad (3)$$

10 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$(e^x - 1)(e^x - e^2) = 0 \quad (1)$$

$$(e^x - 1)(e^x - e^2) > 0 \quad (2)$$

2 - الدوال الأسية $x \mapsto e^{kx}$

11 في كل حالة من الحالات التالية، عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(0) = 1 \quad \text{و} \quad f' = 3f \quad 1.$$

$$f(0) = 1 \quad \text{و} \quad f' = -f \quad 2.$$

$$f(0) = 1 \quad \text{و} \quad f' = \frac{1}{2}f \quad 3.$$

12 f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(0) = \lambda \quad \text{و} \quad f' = kf$$

مع k و λ عدنان حقيقيان و $\lambda \neq 0$

لتكن لدالة g المعرفة بـ: $g = \frac{1}{\lambda}f$

$$g(0) = 1 \quad \text{و} \quad g' = kg \quad 1.$$

2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f(x) = \lambda \exp(kx)$

13 في كل حالة من الحالات التالية، عين الدالة الوحيدة

f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(0) = -1 \quad \text{و} \quad f' = -6f \quad 1.$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad f' = -2f \quad 2.$$

$$f(0) = 2 \quad \text{و} \quad f' = \sqrt{2}f \quad 3.$$

14 f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(0) = 1 \quad \text{و} \quad f' = 2f$$

بتطبيق طريقة أولر أنجز جدولاً يتضمن القيم التقريبية

لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0; 2]$ ثم أنشئ تمثيلاً

تقريبياً للدالة f باختيار خطوة h حيث:

$$h = 0,1 \quad (2) \quad , \quad h = 0,2 \quad (1)$$

15 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و غير معدومة حيث من أجل

كل عددين حقيقيين x و y : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

$$f(0) = 1 \quad \text{بين أن} \quad 1.$$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) \times f(-x) = 1$$

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

ب- استنتج إشارة الدالة f .

16 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

1. أ- من أجل كل عدد حقيقي x ، عبر عن $f(2x)$ ،

$$f(3x), f(4x) \text{ بدلالة } f(x)$$

ب- من أجل كل عدد حقيقي x ، و من أجل كل عدد طبيعي

$$n \geq 1, \text{ خمن عبارة } f(nx) \text{ بدلالة } f(x).$$

نقبل هذه النتيجة فيما يلي.

2. نضع $k = f(1)$. بين أنه أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$f(n) = k^n \quad (\text{ب} \quad \left[f\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n = k)$$

$$\bullet \text{ استنتج } f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ و } f\left(\frac{1}{4}\right) \text{ بدلالة } k.$$

3 - دراسة الدالة الأسية

17 ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f

عند $-\infty$ و عند $+\infty$

$$f(x) = e^{-x} \quad (1) \quad f(x) = 2e^{2x} \quad (2)$$

$$f(x) = e^x + e^{-x} \quad (3) \quad f(x) = x + e^{2x} \quad (4)$$

18 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 1 + e^x + e^{2x}$

ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

19 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{2x} - e^x$

أ. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = e^{2x}(1 - e^{-x})$$

ب- استنتج نهاية f عند $+\infty$.

• في التمارين من 20 إلى 23 ادرس نهاية الدالة f عند

a حيث a يمثل 0 أو $-\infty$ أو $+\infty$:

$$\textbf{20} \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} \quad \text{عند } -\infty \text{ و عند } +\infty$$

$$\textbf{21} \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{2x} \quad \text{عند } 0$$

$$\textbf{22} \quad f(x) = \frac{1}{x}(e^{3x} - 1) \quad \text{عند } 0 \text{ و عند } +\infty.$$

$$\textbf{23} \quad f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \quad \text{عند } -\infty \text{ و عند } +\infty$$

(يمكنك وضع $X = \frac{1}{x}$)

$$\textbf{24} \quad f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ } f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x}$$

1. اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = e^x \times g(x)$.

2. استنتج نهاية الدالة f عند 0.

$$\textbf{25} \quad f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ } f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

$$\textbf{26} \quad f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ } f(x) = x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب لمنحني

الدالة f عند $+\infty$.

3. بين أن الدالة f فردية.

4. أ- استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب- استنتج أن منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً

عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

$$\textbf{27} \quad f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = 2x + 1 - e^{-x}$$

1. بين أن المستقيم D الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب

للمنحني (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

2. ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى D .

$$\textbf{28} \quad f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = -x + 2 + 3e^{-2x}$$

بين أن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيماً مقارباً

عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

• في التمارين من 29 إلى 36، احسب الدالة المشتقة f'

للدالة f على المجال I .

$$\textbf{29} \quad I = \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^x$$

$$\textbf{30} \quad I = \mathbb{R}, \quad f(x) = (2x - 3)e^x$$

$$\textbf{31} \quad I = \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$$

$$I = \mathbb{R}^* \quad , \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad 32$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 1} \quad 33$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - x} \quad 34$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = (1 + \cos x)e^x \quad 35$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = (e^x - 1)(e^x + 2) \quad 36$$

• في التمارين من 37 إلى 39 ، احسب الدالة المشتقة f' للدالة f .

$$f(x) = (-x-1)e^{-x} \quad (2) \quad f(x) = e^{2x+3} \quad (1) \quad 37$$

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{2x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{2}}} \quad (1) \quad 38$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} \quad (2) \quad f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (1) \quad 39$$

مساعدة: الدالة $f: x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على مجموعة قابلية اشتقاق الدالة u و دالتها المشتقة هي: $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

40 باستعمال التقريب التآلفي لـ e^h من أجل h قريب من الصفر ، أعط قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية:

$$e^{0.1} \quad (1) \quad \frac{1}{e^{0.002}} \quad (2) \quad \frac{e^{1.999}}{e^2} \quad (3)$$

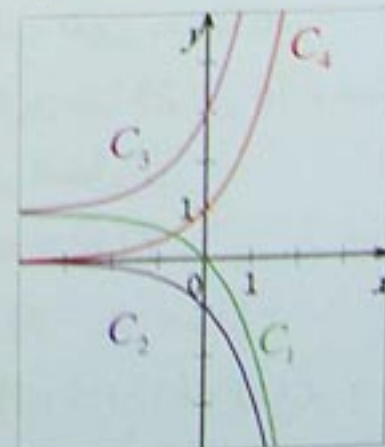
41 1. ارسم في معلم متعامد و متجانس المنحني (C) الممثل للدالة $f: x \mapsto e^x$.

2. استنتج رسم منحنيات الدوال التالية:

$$f_1: x \mapsto e^x + 1 \quad (أ) \quad f_2: x \mapsto -e^x \quad (ب)$$

$$f_3: x \mapsto e^x - 2 \quad (ج) \quad f_4: x \mapsto |e^x - 2| \quad (د)$$

42 إليك التمثيل البياني لأربعة منحنيات في معلم متعامد و متجانس



ارقق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني:

$$g: x \mapsto -e^x \quad , \quad f: x \mapsto e^x$$

$$k: x \mapsto 1 + 2e^x \quad , \quad h: x \mapsto 1 - e^x$$

43 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + 1 + e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة f .

2. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3. شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. أنشئ في معلم متعامد التمثيل البياني للدالة f .

44 f دالة معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x}$$

1. أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2. أ- بين أن المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم يقبل

مستقيماً مقارباً D عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ب- ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم D .

3. أرسم المستقيم D و المنحني (C) .

$$f(x) = \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} \quad \text{بـ} \quad \mathbb{R} \quad \text{دالة معرفة على} \quad 45$$

$$f(x) = \frac{1 - 3e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{كل} \quad 1.$$

2. عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها.

4. شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{4e^x + 3}{2(e^x + 1)} \quad \text{بـ} \quad \mathbb{R} \quad \text{دالة معرفة على} \quad 46$$

و (C) المنحني الممثل لها في معلم

1. لماذا المستقيمان Δ و D اللذان معادلتهما على الترتيب

$$y = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad y = 2 \quad \text{مقاربان للمنحني} \quad (C) \quad ?$$

2. أ- احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

ب- ادرس تغيرات f .

ج- ارسم Δ ، D و (C) .

(5) ارسم T و (C) .

إليك نص تمرين و الحل المقترح من قبل تلميذ.

أعد صياغة هذا الحل آخذاً بعين الاعتبار ملاحظات المصحح.

التمرين: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. ارسم في معلم متعامد ومتجانس منحنى الدالة f .

الحل المقترح: (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

عش هذه النتيجة

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ إذن $f(x) = e^x(e^x - 2)$

(2) - من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

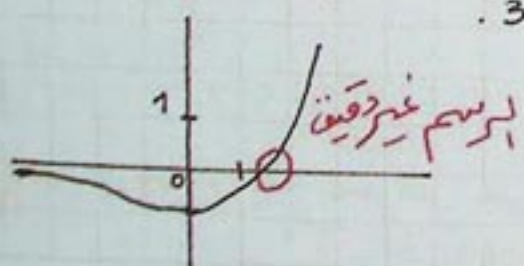
$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$$

اذن: حزايدة على $[0; +\infty[$ و متناقصة على $] -\infty; 0]$

جور إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$?$	$?$	$?$

هذا الجدول غير كامل

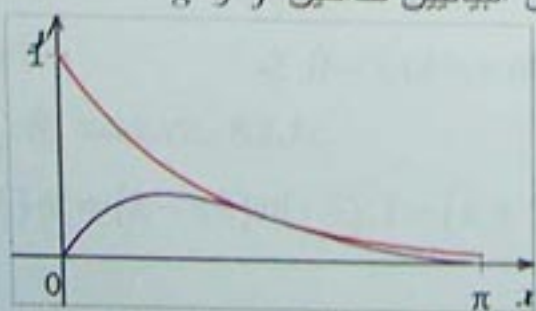


51 f و g دالتان معرفتان على $[0; \pi]$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x} \sin x \quad \text{و} \quad g(x) = e^{-x}$$

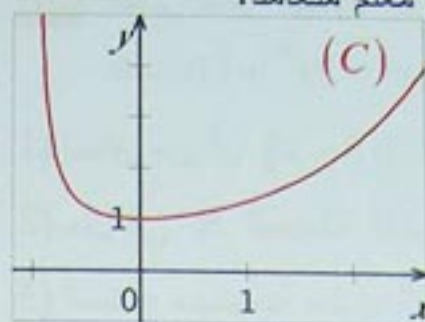
1. في الشكل الموالي و باستعمال راسم منحنيات مثلثا

المنحنيين البيانيين للدالتين f و g .



47 f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

و (C) المنحني الممثل لها في معلم متعامد.



(انظر الشكل المقابل).

1. a عدد حقيقي من

$]-1; +\infty[$. اكتب معادلة

المماس T_a للمنحني

(C) عند النقطة التي فاصلتها a .

2. بين أنه توجد قيمتين لـ a بحيث يكون المماس T_a

يشمل مبدأ المعلم.

48 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{-x} - x - 2$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. بين أن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيماً مقارباً

مائلاً يطلب تعيين معادلة له.

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً واحداً α حيث

$$-0,45 < \alpha < -0,44$$

5. استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

49 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر

النتائج هندسياً.

(2) بين أن النقطة $A(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحني (C) .

(3) عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة A .

(4) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

(أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1 + e^x)^2}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g .

ج) استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

د) استنتج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم T .

• بين أن المنحنيين يشتركان في نقطة A .

2. بين أن المنحنيين يقبلان في النقطة A مماسا مشتركا.

4 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

• في التمارين من 52 إلى 56 عين مجموعة تعريف

الدالة f للمتغير الحقيقي x :

52 (1) $f : x \mapsto \ln(x+1)$

(2) $f : x \mapsto \ln(-2x+3)$

(3) $f : x \mapsto 2 \ln(x^2+1)$

(4) $f : x \mapsto \ln|x|$

53 (1) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$

(2) $f : x \mapsto \ln(x^2-4)$

(3) $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-2)$

(4) $f : x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$

54 (1) $f : x \mapsto \ln \sqrt{2-3x}$ (2) $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

(3) $f : x \mapsto \frac{1-x}{\ln x}$ (4) $f : x \mapsto \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|$

55 (1) $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ (2) $f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$

(3) $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \ln x$ (4) $f : x \mapsto \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$

56 (1) $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x - 1}$ (2) $f : x \mapsto \frac{x^2}{2 \ln x + 1}$

(3) $f : x \mapsto \frac{\ln \sqrt{x^2-1}}{x}$ (4) $f : x \mapsto \ln|x+1| - \ln|x|$

57 هل الدالتان f و g المعرفتان على $]0; +\infty[$ بـ :

$f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ و $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

متساويتين؟

58 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(أ) $\ln x = 2$ (ب) $\ln x = -3$

(ج) $7 \ln x = 2$ (د) $\ln x + \ln 3 = 0$

59 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(1) $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$ (2) $\ln(x^2+x) = 1$

(3) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$ (4) $\ln|1-x| = \ln 3$

60 نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x حيث:

$P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

(1) تحقق من أن $P(x) = (2x-1)(x+2)(3-x)$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

(3) استنتج مجموعة حلول المعادلة :

$-2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 + 11 \ln x - 6 = 0$

(4) $-2e^{3x} + 3e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$

61 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

(1) $\ln x < 1$ (2) $\ln 2x > -1$

(3) $\ln(2x+3) < 5$ (4) $\ln(1-x) \leq 2$

(5) $\ln x > \ln(2x-1)$ (6) $x \ln x - \ln x \geq 0$

5 - الخواص الجبرية

62 اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

(1) $\ln 14 - \ln 7$ (2) $\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3}$

(3) $\frac{\ln 100}{\ln 10}$ (4) $\ln(10000) + \ln(0,01)$

(5) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}$ (6) $e^{1+\ln 2}$ (7) $e^{-2 \ln 3}$

63 بسط ما يلي :

• $A = \ln e^3 - \ln e^2$ • $B = \ln(e\sqrt{e})$

• $C = \ln 2 + \ln(8e) - \ln(4e^2)$

• $D = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \ln^2\left(\frac{1}{e}\right)$

64 اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

• $A = 3 \ln 2 - \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 8$

• $B = 2 \ln(0,1) - 3 \ln(0,01) + \ln 2$

• $C = 2 \ln(100) - \ln\left(\frac{1}{10}\right)$

65 اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

• $A = \ln a - \ln b + 2 \ln c$

• $B = \frac{1}{2} \ln a - \frac{3}{2} \ln b + \ln \frac{a}{b}$

72 نعتبر كثير الحدود f للمتغير الحقيقي x حيث:

$$f(x) = 2x^2 - x - 1$$

(1) عين جذور $f(x)$

(2) أ- حل $2(\ln x)^2 - \ln x - 1$

ب- استنتج مجموعة الحلول في $\mathbb{R}$ للمترابحة

$$2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \leq 0$$

(3) حل في $\mathbb{R}$ المترابحة $\ln x + \ln(2x-1) > 0$

73 حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln \frac{x}{y} = -\ln 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + y = 60 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases} \quad (3)$$

74 بحالوريا

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول t التالية:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^x \times e^y = 1 \end{cases} \quad (2) \quad \text{حل في } \mathbb{R}^2 \text{ الجملة التالية:}$$

75 بحالوريا

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x التاليتين:

$$e^{x+2} - e - 2e^{-x} = 0 \quad 1.$$

$$\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \quad 2.$$

76 عين أصغر عدد طبيعي n في الحالات التالية:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,02 \quad (أ) \quad 0,8^n \leq 0,01 \quad (ب)$$

$$21000(1+0,035)^n \geq 30000 \quad (د) \quad (1,2)^n \geq 1040 \quad (ج)$$

$$(u_n) \text{ متتالية هندسية حدها الأول } u_0 = 2 \text{ وأساسها } \frac{3}{2} \quad 77$$

ابتداءً من أية رتبة تكون حدود المتتالية أكبر من 10^5 ؟

6 - دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \quad 78 \quad \text{دالة معرفة على }]0; +\infty[$$

ادرس نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \quad 79 \quad \text{دالة معرفة على }]0; +\infty[\text{ كما يلي:}$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$C = \ln(a+1) - \frac{1}{2}\ln b + \frac{3}{2}\ln(a+b) \quad \bullet$$

66 اكتب على شكل مجموع أو فرق ما يلي :

$$B = \ln(2500000) \quad \bullet \quad A = \ln(1400) \quad \bullet$$

67 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$2\ln(x-3) = \ln 4 \quad (1)$$

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \quad (2)$$

$$2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \quad (3)$$

$$2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \quad (4)$$

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \quad (5)$$

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \quad (6)$$

68 حل في $\mathbb{R}$ المترابحات التالية:

$$\ln(x-1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x+4) \quad (1)$$

$$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \quad (2)$$

$$\ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \quad (3)$$

$$\ln(35 - 8x) \geq 3\ln 2 + \ln(x)^2 \quad (4)$$

69 ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0; +\infty[$

$$\ln x - \ln 3 \quad (1) \quad (\ln x + 1)(\ln x - 1) \quad (2)$$

$$2x \ln(1-x) \quad (4) \quad \ln x(\ln x - 1) \quad (3)$$

$$-x^2 \ln(x+1) \quad (5)$$

70 نعتبر كثير الحدود p للمتغير الحقيقي x حيث:

$$p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$$

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } p(x) = 0$$

(2) استنتج حل المعادلتين:

$$(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0 \quad (أ)$$

$$[\ln(\ln x)]^4 - 25[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0 \quad (ب)$$

71 نعتبر كثير الحدود $P(x) = 4x^2 - 4x - 3$

$$(1) \text{ عين جذور } P(x).$$

(2) استنتج حل المعادلتين التاليتين:

$$4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0 \quad (أ)$$

$$\ln(4x-3) = \ln(x+3) - \ln x \quad (ب)$$

ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

80 دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 2(\ln x)^2 - \ln x - 3$$

1. ادرس نهاية الدالة f عند 0.

2. من أجل $x > 1$ ، ضع $\ln x$ كعامل مشترك في $f(x)$ ،

ثم عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

• في التمرينين **81** و **82**، احسب النهايات المطلوبة

81 (أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln x$ ؛ (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln x$

(ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \ln x$ ؛ (د) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 5 - \ln x$

82 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \ln x}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) \ln(-x)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x) \ln x$

83 دالة معرفة على $]e; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

1. بين أنه من أجل كل $x > e$ ، $f(x) = \frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{\frac{1}{\ln x} - 1}$

2. عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

84 دالة معرفة على $]2; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \ln(\ln(x-1))$$

1. بين لماذا الدالة f معرفة من أجل كل $x > 2$ ؟

2. باستعمال نهاية دالة مركبة، عين نهايات الدالة f عند 2 و عند $+\infty$.

85 احسب النهايات التالية:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{x}$

86 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0.

• في التمرينين **87** و **88** حدد مجموعة التعريف

و مجموعة قابلية الاشتقاق ثم احسب المشتقة $f'(x)$

للدوال f المعطاة:

87 $f(x) = x + \ln x$ ؛ $f(x) = 2x^2 - \ln(x)$

$f(x) = -x + \ln 2 + \ln x$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

$f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$ ؛ $f(x) = x \ln x$

$f(x) = \frac{1}{\ln x}$ ؛ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

88 $f(x) = \ln(-2x-1)$

$f(x) = \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2$

$f(x) = x(2 - \ln x^2)$

$f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x}$

مساعدة: مشتقة الدالة $f: x \mapsto \ln(u(x))$ هي الدالة

$$f': x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$$

89 تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال D

ثم احسب دالتها المشتقة:

(1) $D =]0; +\infty[$ ، $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x$

(2) $D =]0; +\infty[$ ، $f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$

(3) $D =]-\infty; 0[$ ، $f(x) = x \ln|x| - 2x + 3$

(4) $D =]0; +\infty[$ ، $f(x) = -\frac{x}{2} + x \ln x$

(5) $D =]e; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x+1}{\ln x - 1}$

90 في كل حالة من الحالات التالية عين معادلة المماس

للمنحني الممثل للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ عند النقطة

التي فاصلتها x_0 .

(1) $x_0 = e$ ؛ $f(x) = -x + 1 + \ln x$

(2) $x_0 = 1$ ؛ $f(x) = x^2 - 2 + 3 \ln x$

96 $D =]0; +\infty[\quad ; f(x) = -\frac{3}{2}x + \ln(2x)$ (1)

$D =]-\infty; 1[\quad ; f(x) = 2x - \ln(1-x)$ (2)

$D =]1; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln(x-1)$ (3)

$D =]1; 3[\quad ; f(x) = 2x + \ln x - \ln(x-1)$ (4)

97 $D =]-\infty; 0[\quad ; f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ (1)

$D =]0; +\infty[\quad ; f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$ (2)

$D =]0; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ (3)

$D =]-5; 1[\quad ; f(x) = \ln(1-x) + \ln(x+5)$ (4)

7- دالة اللوغاريتم العشري

98 نعتبر العدد الطبيعي n حيث $n = 2^{1234}$

1. عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.

2. استنتج الحصر التالي: $10^{371} \leq n < 10^{372}$.

3. حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n .

99 علما أن $\log(3,81) \approx 0,58092$ ، استنتج بدون

باستعمال الحاسبة قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية:

$\log(381)$ ، $\log(0,381)$ ، $\log(3,81 \times 10^{-3})$

100 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(1 $\log x = 5$ (2 $\log x = -3$ (3 $\log x = 0,01$

101 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

(1 $\log x > 4$ (2 $\log x < -10$

(3 $\log x \geq 0,1$ (4 $\log x < \log(1-x)$

7- المعادلات التفاضلية

102 حل المعادلات التفاضلية التالية

(1 $y' = 3y$ (2 $y' + 2y = 0$

(3 $2y' + 5y = 0$ (4 $\frac{1}{2}y' = 4y$

103 حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 0$ (1)

(2 عين الحل الخاص f الذي يحقق $f(\ln 4) = 1$

104 f هي حل المعادلة التفاضلية $2y' + y - 5 = 0$

هل المنحني الممثل للدالة f يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا

(3 $x_0 = e \quad ; f(x) = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{e}{\ln x}\right)$

91 لتكن الدالة f المعرفة على $]-2; +\infty[$ بـ:

$f(x) = 3\ln(2+x) + x^2 - 3x$

بين أن المنحني C الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.

92 المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1 ارسم المنحني C الممثل للدالة $\ln$ ثم استنتج رسم المنحني Γ الممثل للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$f(x) = 2 - \ln x$

- حدد التحويل الهندسي المستعمل.

(2 نفس السؤال من أجل $g(x) = \ln(x-1) + 2$ على المجال $]1; +\infty[$.

93 لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$f(x) = 2x + 3 + \ln x$

بين أن الدالة f هي مجموع دالتين لهما نفس اتجاه التغير، واستنتج تغيرات f .

94 لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$f(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة f بدون حساب المشتقة.

2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3. شكل جدول تغيرات الدالة f .

95 ادرس تغيرات الدالة f على المجال D وذلك باستعمال

اتجاه تغير مركب دالتين:

(1 $D =]3; +\infty[\quad ; f(x) = \ln(x-3)$

(2 $D =]-\infty; 1[\quad ; f(x) = \ln(1-x)$

(3 $D =]0; +\infty[\quad ; f(x) = \ln(2x^2)$

(4 $D =]2; +\infty[\quad ; f(x) = \ln|x-2|$

(5 $D =]2; +\infty[\quad ; f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$

• في التمرينين 96 و 97 وفي كل حالة من الحالات

ادرس تغيرات الدالة f على المجال D باستعمال المشتقة

معادلته $y = \frac{5}{2}$ ؟

105 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2e^{-5x}$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة .

106 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 3e^{-2x} - 4$$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة .

107 نعتبر الدالة m المعرفة على $[0; +\infty[$ التي ترفق

بالعدد t ، العدد $m(t)$ حيث $m(t)$ هي كتلة الملح بالغرام المحتواة في محلول ملحي (ماء+ملح) عند اللحظة t بالدقائق

نقبل أن الدالة m هي حل للمعادلة التفاضلية $(E): 5y' + y = 0$ و أن الشرط الابتدائي هو $m(0) = 300$.

1. أ- حل المعادلة (E) .

ب- بين أنه من أجل كل $t \in [0; +\infty[$ ، $m(t) = 300e^{-\frac{t}{5}}$

2. عين العدد t_0 حيث $m(t_0) = 150$

3. نقبل أنه لا يمكن الكشف عن وجود الملح خلال اللحظة t إلا إذا كان $m(t) \leq 10^{-2}$.

ابتداء من أية لحظة يكون ممكنا الكشف عن وجود الملح؟

تمارين للتعمق

108 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = ae^{2x} + be^x + c$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية

(C) هو التمثيل البياني للدالة في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) عين a, b, c بحيث المنحني (C) يشمل النقطة O والدالة المشتقة f' تتعدم من أجل $x = \ln \frac{3}{4}$ و المستقيم

الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C).

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2e^{2x} - 3e^x + 1$$

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني

؟(C)

• احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (يمكن وضع e^x كعامل مشترك)

• ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

ب) حدد نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل.

• عين معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي

فاصلتها 0.

ج) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C).

د) ارسم (C).

109 الهدف من هذا التمرين إثبات أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

أ- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}$$

1) احسب $f'(x)$ و بين أن $f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$

2) استنتج جدول تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$ (حساب

النهايات غير مطلوب)

3) برر إذن أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $\ln x < \sqrt{x}$

ب- 1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$:

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$. استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

110 نعتبر المعادلتين التفاضليتين:

$$(E_1): y' - 2y = 0 \quad \text{و} \quad (E_2): y' = y$$

1. أ- حل المعادلتين (E_1) و (E_2) .

ب- عين الحل الخاص f_1

للمعادلة (E_1) بحيث $f_1'(0) = 4$

• عين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) بحيث $f_2(0) = 1$.

2. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 2e^{2x} - e^x$

أ- ادرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب- استنتج وجود مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلته.

ج- احسب g' مشتقة الدالة g .

د- ادرس إشارة g' ثم شكل جدول تغيرات g .

3. حدد نقط تقاطع المنحني الممثل للدالة g مع محوري الإحداثيات.

4. أنشئ المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد.

111 بكالوريا

الجزء 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

كما يلي: $f(x) = \ln(1+2x)$

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

2. عين نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\frac{1}{2}$.

3. نعتبر الدالة g المعرفة على I بـ: $g(x) = f(x) - x$

أ- ادرس تغيرات g على I .

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين: 0 و حل آخر

نرمز له بـ α حيث $\alpha \in [1; 2]$

ج- استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x \in I$.

4. بين أنه من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ ، $f(x) \in]0; \alpha[$

الجزء 2: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بـ:

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 = 1$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n \in]0; \alpha[$$

2. برهن بالتراجع أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة.

3. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة.

112 بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $[0; 1]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = \ln(x) \times \ln(1-x); x \in]0; 1[\end{cases}$$

نرمز بـ (C) إلى المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد

و متجانس الوحدة: 10cm

نقبل أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ وكذلك

النتيجة التالية: من أجل $\alpha > 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$

1. أ- عين نهاية $\frac{\ln(1-x)}{x}$ عندما يؤول x إلى 0.

ب- استنتج نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما يؤول x إلى 0.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟

2. بين أنه من أجل كل $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

$$f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟

3. لتكن φ الدالة f المعرفة على $]0; 1[$ كما يلي:

$$\varphi(x) = (1-x) \ln(1-x) - x \ln x$$

أ- احسب $\varphi'(x)$ ، ثم بين المساواة التالية:

$$\varphi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$$

استنتج تغيرات الدالة φ' على المجال $]0; 1[$.

ب- بين أن φ' تتعدم عند قيمتين α_1 و α_2 على $]0; 1[$ (لا

نريد حساب هاتين القيمتين). أعط إشارة φ' على $]0; 1[$.

ج- عين نهاية $\varphi(x)$ عندما يؤول x إلى 0 و نهاية

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

• استنتج إشارة $\varphi(x)$ على المجال $]0; 1[$.

4. أ- بين أن $f'(x)$ لها نفس إشارة $\varphi(x)$ على $]0; 1[$.

ب- شكل جدول تغيرات f .

ج- بين أنه من أجل كل $x \in]0; 1[$:

$$0 < \ln(x) \times \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2$$

د- ارسم (C)

113 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln x$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x - 1 + \ln x$$

ب- تحقق أن $g(1) = 0$. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب- استنتج تغيرات f .

ج- ادرس نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

د- شكل جدول تغيرات f .

3. ارسم على شاشة الآلة الحاسبة ثم على الورقة

المنحني (C) .

114 **بكالوريا**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب- عين الدالة المشتقة للدالة f .

ج- ادرس إشارة $f'(x)$. استنتج تغيرات f .

2. أ- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y = 2x$ مقارب

للمنحني (C) عند $+\infty$.

ب- ارسم المستقيم D والمنحني (C) .

3. k عدد حقيقي موجب تماما

ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$

بالحساب. (ب) باستعمال تغيرات الدالة f .

115 **بكالوريا** f دالة معرفة على $]-1; 1[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1. أ- عين مشتقة الدالة f .

ب- استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]-1; 1[$.

2. أ- ادرس نهايات الدالة f عند -1 و عند 1 .

ب- استنتج وجود مستقيمت مقاربة للمنحني (C) .

3. أ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب- بين أن مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحني (C) .

ج- أنشئ لمنحني (C) و المماس لـ (C) عند النقطة التي

فاصلتها 0.

4. أ- انطلاقا من الدراسة السابقة، بين أنه من أجل كل

عدد حقيقي y ، المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا واحدا.

ب- عبر بالحساب، عن x بدلالة y .

ج- نرسم بـ (C') إلى المنحني الممثل للدالة.

اشرح لماذا المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى

المستقيم الذي معادلته $y = x$ ؟

د- ارسم (C') في نفس المعلم السابق.

116 **بكالوريا**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \text{ و } f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

ب- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ج- بين أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 اللذين معادلتهما على

الترتيب $y = x + 1$ و $y = x - 1$ مقاربان لـ (C) عند $-\infty$

و عند $+\infty$.

د- حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى كل من Δ_1 و Δ_2 .

2. أ- بين أن الدالة f فردية.

ب- ادرس تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$.

3. ارسم Δ_1 ، Δ_2 ، المماس للمنحني (C) عند النقطة التي

فاصلتها 0، ثم المنحني (C) .

117 **بكالوريا**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. لتكن الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 - 2, 2x + 2, 2 \ln(x + 1)$$

• مثل على شاشة الحاسبة البيانية المنحني البياني للدالة f

باختيار النافذة: $-2 \leq x \leq 4$ و $-5 \leq y \leq 5$

• انقل على ورقتك شكل المنحني الذي تحصلت عليه.

2. حسب هذا التمثيل البياني ماذا يمكنك أن تخمن:

أ- بالنسبة لتغيرات الدالة f ؟

ب- بالنسبة لعدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

3. نريد الآن دراسة الدالة f .

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f .

3. حدد نقط تقاطع المنحني الممثل للدالة g مع محوري الإحداثيات.

4. أنشئ المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد.

111 بحالوريا

الجزء 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

كما يلي: $f(x) = \ln(1+2x)$

1. بين أن الدالة f متزايدة تماماً على I .

2. عين نهاية $f(x)$ عندما x يؤول إلى $-\frac{1}{2}$.

3. نعتبر الدالة g المعرفة على I بـ: $g(x) = f(x) - x$

أ- ادرس تغيرات g على I .

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين: 0 و حل آخر

نرمز له بـ α حيث $\alpha \in [1; 2]$

ج- استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x \in I$.

4. بين أنه من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ ، $f(x) \in]0; \alpha[$

الجزء 2: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بـ:

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 = 1$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n \in]0; \alpha[$$

2. برهن بالتراجع أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة.

3. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة.

112 بحالوريا

لكن الدالة f المعرفة على $[0; 1]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = \ln(x) \times \ln(1-x); x \in]0; 1[\end{cases}$$

نرمز بـ (C) إلى المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد

و متجانس الوحدة: $10cm$

نقبل أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ وكذلك

النتيجة التالية: من أجل $\alpha > 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$

1. عين نهاية $\frac{\ln(1-x)}{x}$ عندما x يؤول إلى 0.

ب- استنتج نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما x يؤول إلى 0.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟

2. بين أنه من أجل كل $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

$$f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟

3. لتكن φ الدالة f المعرفة على $]0; 1[$ كما يلي:

$$\varphi(x) = (1-x) \ln(1-x) - x \ln x$$

أ- احسب $\varphi'(x)$ ، ثم بين المساواة التالية:

$$\varphi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$$

استنتج تغيرات الدالة φ' على المجال $]0; 1[$.

ب- بين أن φ' تتعدم عند قيمتين α_1 و α_2 على $]0; 1[$ (لا

نريد حساب هاتين القيمتين). أعط إشارة φ' على $]0; 1[$.

ج- عين نهاية $\varphi(x)$ عندما x يؤول إلى 0 و نهاية

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$
 احسب $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ عندما x يؤول إلى 1. احسب $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

• استنتج إشارة $\varphi(x)$ على المجال $]0; 1[$.

4. أ- بين أن $f'(x)$ لها نفس إشارة $\varphi(x)$ على $]0; 1[$.

ب- شكل جدول تغيرات f .

ج- بين أنه من أجل كل $x \in]0; 1[$

$$0 < \ln(x) \times \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2$$

د- ارسم (C)

113 بحالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln x$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x - 1 + \ln x$$

ب- تحقق أن $g(1) = 0$. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$

ب- ادرس نهايات الدالة f عند -1 و عند $+\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- استنتج من هذه الدراسة عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

د- هل نتائج السؤالين 3.أ و 3.ب تؤكد التخمين الذي

وضعه في السؤال 2؟

4. نريد أن نمثل على شاشة الحاسبة البيانية منحنى الدالة f

على المجال $[0,1;0,2]$ لغرض المشاهدة.

أ- ما هي القيم الحدية للدالة f التي تقترحها حتى تكون

مطابقة لنتائج السؤال 3.ج على نافذة آلتك الحاسبة؟

ب- باستعمال الحاسبة عين قيمة مقربة بالزيادة إلى 10^{-2}

للحل الأكبر α للمعادلة $f(x) = 0$.

118 f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحققان

الشروط الثلاثة التالية:

(1) من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$$

(2) من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = g'(x)$

$$f(0) = 1 \quad (3)$$

1.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) \neq 0$

ب- احسب $g(0)$

2. باستعمال الشرط (1) و تطبيق الاشتقاق، بين أنه من أجل

كل عدد حقيقي x ، $g(x) = f'(x)$

3. نضع $u = f + g$ و $v = f - g$

أ- احسب $u(0)$ و $v(0)$

ب- بين أن $u' = u$ و $v' = -v$

ج- عين الدالتين u و v .

4. استنتج عبارتي $f(x)$ و $g(x)$.

119 f دالة معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة $2cm$

1.أ- ادرس نهاية f عند $+\infty$.

ب- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب

للمنحني (C).

ج- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم D .

2.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$:

$$f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$$

ب استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $f'(x) > 0$

ج- حدد $f'(0)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

3.أ- ارسم D و المنحني (C).

ب- عين النقطة A من (C) التي يكون عندها المماس

موازيًا للمستقيم D .

120 الجزء 1:

1. ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(t) = e^t - t - 1$$

ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$ ؟

2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي t ، $e^t \geq t + 1$

و $e^t > t$

الجزء 2: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 - 2 \ln(e^x - x)$$

1.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = x^2 - 2x - 2 \ln(1 - xe^{-x})$$

ب- نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ ، احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2.أ- اشرح لماذا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بين أنه من

أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

3. في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة: 3cm)، نعتبر القطع المكافئ P الذي معادلته $y = x^2 - 2x$ والمنحني (C) الممثل للدالة f . أ- بين أن $f(x) - (x^2 - 2x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$.

• عندما يكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) - f_2(x) = 0$ ، نقول أن

المنحنيين الممثلين للدالتين f_1 و f_2 متقاربان عند $+\infty$.

ب- ادرس الوضعية النسبية لمنحنيين P و (C) .

4. عين معادلة لكل من المماسين D و D' على الترتيب

للمنحنيين P و (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

5. ارسم في نفس المعلم، المنحنيين P و (C) و المماسين

D و D' .

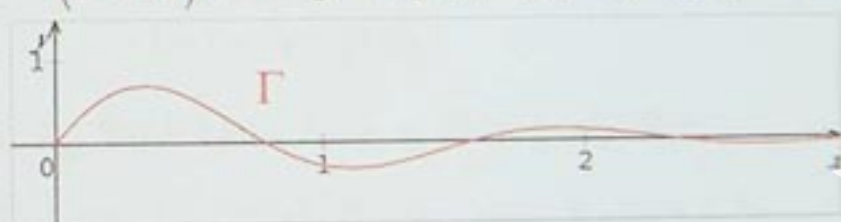
121 بحالوريا

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$$

الشكل الموالي هو تمثيلها البياني Γ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$



نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = e^{-x}$

و نرسم C إلى تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

ب- استنتج نهاية f عند $+\infty$.

2. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين Γ و C .

3. نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = f\left(n \frac{\pi}{2}\right)$

أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و ادرس تقاربها.

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)]$$

ب- استنتج أن المنحنيين Γ و C لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5. أعط قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس T

للمنحني Γ عند النقطة التي فاصلتها $\frac{\pi}{2}$

• أتمم الشكل السابق برسم المماس T و المنحني C .

مسائل

122 بحالوريا

الجزء 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x}$$

و نرسم C إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، الوحدة 2cm.

1. أ- نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$. احسب نهاية f عند $+\infty$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C ؟

ب- احسب نهاية f عند $-\infty$.

2. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارة f على $\mathbb{R}$

3. شكل جدول تغيرات f .

4. أ- عين إحداثيات النقطة A ، نقطة تقاطع المنحني (C)

مع محور الفواصل.

ب- ادرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

الجزء 2:

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f''(x) = 4(2x - 1)e^{-2x}$$

حيث f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

ب- حل المعادلة $f''(x) = 0$

2. لتكن B النقطة من المنحني (C) التي فاصلتها $\frac{1}{2}$. عين

معادلة للمماس T للمنحني (C) عند B .

3. نريد دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس T ،

من أجل ذلك نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}\right)$$

أ- عين $g'(x)$ و $g''(x)$

الجزء 1: نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$u(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln |x|$$

1. ادرس تغيرات الدالة u على $\mathbb{R}^*$.

2. ادرس نهايات الدالة u عند 0 و $+\infty$.

3. نعتبر المعادلة $u(x) = 0$

أ- بين أن هذه المعادلة تقبل حلا واحد α حيث $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

ب- أعط حصرًا بعددين كسريين للعدد α من الشكل

$$\frac{n}{10} \text{ و } \frac{n+1}{10} \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي.}$$

4. استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الجزء 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = 2x - \frac{\ln |x|}{x^2}$$

نرمز بـ (C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

1. ادرس نهايات الدالة f عند 0 ، $-\infty$ و $+\infty$.

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \right)$$

2. احسب $f'(x)$.

3. ادرس اتجاه تغير لدالة f و شكل جدول تغيراتها.

$$4. \text{أ- بين أن } f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$$

ب- باستعمال حصر α في الجزء 1-3 بين أن :

$$1,6 < f(\alpha) < 2,1 \text{ (لا يطلب رسم المنحني } (C) \text{)}$$

الجزء 3: لتكن النقطة $M(x; y)$ و $M'(x'; y')$ حيث

M' هي نظير M بالنسبة لمحور الترتيب.

1. عين x' و y' بدلالة x و y .

2. أ- بين أنه إذا كانت تتغير على المنحني (C) فإن النقطة

$$M' \text{ تتغير على المنحني } (\Gamma) \text{ الذي معادلته } y = -2x - \frac{\ln |x|}{x^2}$$

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (Γ) .

ب- ادرس إشارة $g''(x)$ حسب قيم x .

استنتج اتجاه تغير الدالة g' على $\mathbb{R}$.

ج- استنتج إشارة $g'(x)$ ثم اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

د- عين إذن إشارة $g(x)$ حسب قيم x . استنتج وضعية

المنحني (C) بالنسبة للمماس T .

4. في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، مثل النقطتين A و B ، ثم ارسم

المماس T و المنحني (C) .

123 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Γ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. ادرس شفعية الدالة f . ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني Γ ؟

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $e^{-x} \leq e^x$.

3. أ- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

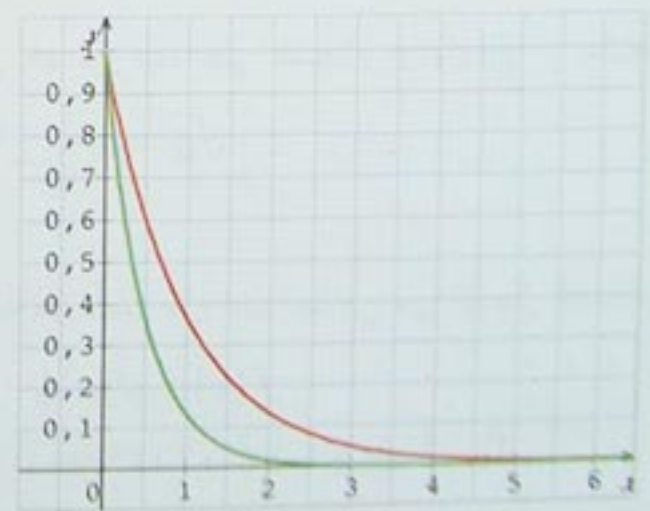
ب- ادرس تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$.

4. نعتبر الدالتين g و h المعرفتان على $[0; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = \frac{1}{2e^x} \text{ و } g(x) = \frac{1}{e^x}$$

في الشكل الموالي مثلنا المنحنيين البيانيين Γ_1 و Γ_2 للدالتين

g و h على الترتيب في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$



أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيات Γ_1 و Γ_2 ؟

انقل الشكل السابق و ارسم في هذا الشكل المنحني Γ محددًا

مماسه عند النقطة التي فاصلتها 0.

الجزء 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

و نرمز بب (C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، الوحدة $2cm$.

1. ادرس شفعية الدالة f ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟
2. ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وتغيرات f على $[0; +\infty[$.
3. مثل المنحنى (C) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء 2: نعتبر النقطة A من المستوي إحداثياتها $(1; 0)$ ، نيتم بأصغر مسافة AM حيث M نقطة من المنحنى (C) .

1. لتكن M فاصلتها x ، عيّن بدلالة x المسافة AM .

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$$

أ- احسب $g'(x)$

ب- احسب $g''(x)$ حيث g'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة g

• بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2$$

ج- استنتج تغيرات الدالة g' على $\mathbb{R}$.

د- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0; 1]$

يحقّق $g'(\alpha) = 0$ ، ثم تحقّق أن $0,46 < \alpha < 0,47$

• عيّن إشارة $g'(x)$ حسب قيم x .

هـ- ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ (لا يطلب حساب

النهايات عند $-\infty$ و عند $+\infty$)، ما هي القيمة الحدية

الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$ ؟

3. نقبل أن المسافة AM تكون صغرى عند النقطة M_α

من المنحنى (C) التي فاصلتها α .

مثل النقطة M_α في الشكل.

4. بين أن: $\alpha - 1 = -\frac{1}{2} f(2\alpha)$

$$g(\alpha) = \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2$$

استعمل تغيرات f و النتيجة $0,46 < \alpha < 0,47$ لحصر

العدد $g(\alpha)$.

استنتج حصراً للمسافة AM سعته 2×10^{-2} .

الهدف من هذه المسألة هو دراسة تغيرات الدالة f

$$f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} \quad \text{المعرفة على }]0; +\infty[\text{ بـ :}$$

الجزء 1:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = 2x - (x-1) \ln(x-1)$$

أ) نقبل أن $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. استنتج نهاية $g(x)$ لما x يؤول

إلى 1.

ب) احسب $g'(x)$ من أجل x ينتمي إلى المجال $]1; +\infty[$.

ج) حل في المجال $]1; +\infty[$ المتراجحة:

$$1 - \ln(x-1) > 0$$

د) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]1; +\infty[$.

هـ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً واحداً α في

المجال $[e+1; e^3+1]$ و ادرس إشارة $g(x)$ على كل

من المجالين $]1; \alpha[$ و $[\alpha; +\infty[$.

2. φ هي الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

أ) ادرس نهاية الدالة φ عند 1. نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

ب) احسب $\varphi'(x)$ و بين أن إشارة $\varphi'(x)$ هي نفس

إشارة $g(x^2)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ج) بين أن φ متزايدة على المجال $]1; \sqrt{\alpha}[$ و متناقصة

على المجال $[\sqrt{\alpha}; +\infty[$.

الجزء 2:

1. تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \varphi(e^x)$$

2. استنتج: أ) نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى 0.

ب) نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

ج) اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ و أن f تقبل

قيمة حدية عظمى عند $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. بين من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$:

$$f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

4. انقل الجدول التالي و أتممه معطياً القيم مقربة إلى 0,01

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5. مثل بيانيا الدالة f في معلم متعامد حيث وحدة الأطوال $5cm$ على محور الفواصل و $10cm$ على محور الترتيب. نأخذ 10 كقيمة مقربة للعدد α .

127 من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما k ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$$

نرمز بـ $\mathcal{C}_k$ إلى منحنى الدالة f_k في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الأطوال $5cm$ على محور الفواصل و $10cm$ على محور الترتيب.

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(x+1) - x$$

أ- ادرس تغيرات الدالة g (لا يطلب حساب النهايات).
ب- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب a ،

$$\ln(a+1) \leq a$$

2. أ- احسب $f_1'(x)$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f_1 .
ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$$

ج- نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .

3. أ- احسب $f_k'(x)$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f_k .
ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$$

ج- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k .

د- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$f_k(x) \leq \frac{k}{e}$$

4. حدد معادلة المماس T_k للمنحنى $\mathcal{C}_k$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

5. ليكن p و m عدنان حقيقيان موجبان تماما حيث $p < m$.

ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}_m$ و $\mathcal{C}_p$.

6. ارسم T_1 ، T_2 ، $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ ،

128 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 1 + x \ln(x+2)$$

نرمز بـ $\mathcal{C}_f$ إلى منحنى الدالة f في معلم متعامد

و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الأطوال $4cm$.

الجزء 1: دراسة تغيرات الدالة f

1. أ- f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f و f'' هي

دالتها المشتقة الثانية. احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ من أجل

كل عدد حقيقي x من المجال $]-2; +\infty[$.

ب- ادرس تغيرات f' على المجال $]-2; +\infty[$.

ج- عين نهايات f' عند -2 و عند $+\infty$.

2. أ- بين أنه على المجال $]-2; +\infty[$ المعادلة $f'(x) = 0$

تقبل حلا واحدا α ينتمي إلى المجال $]-0,6; -0,5[$.

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x .

3. أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-2; +\infty[$.

ب- عين نهايات f عند -2 و عند $+\infty$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

الجزء 2: وضعية المنحنى $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى مماساته.

ليكن x_0 عدد حقيقي من المجال $]-2; +\infty[$. نسمي T_{x_0}

المماس لـ $\mathcal{C}_f$ عند النقطة التي فاصلتها x_0 .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2; +\infty[$ ، نضع:

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$$

1. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-2; +\infty[$ ،

$$d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

ب- مستعملا تزايد الدالة f' ، أعط إشارة $d'(x)$ حسب

قيم x . استنتج تغيرات d على المجال $]-2; +\infty[$.

2. عين الوضعية النسبية لـ $\mathcal{C}_f$ و T_{x_0} .

الجزء 3: رسم المنحنى

1. عين معادلة للمستقيم T_0 ، مماس المنحنى $\mathcal{C}_f$ عند النقطة

التي فاصلتها 0، ارسم T_0 .

2. جد الأعداد الحقيقية x_0 بحيث تكون المماسات تمر

بالمبدأ ثم ارسم هذه المستقيمات.

3. ارسم المنحنى $\mathcal{C}_f$ من أجل قيم x المحصورة بين -1 و 2.

نأخذ $\alpha = -0,54$ و $f(\alpha) = 0,8$.

اختيار من متعدد

129 اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة لكل سؤال.

1. المعادلة $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$:
(1) 0 حلا (2) حلا واحدا (3) حلين (4) حلين على الأكثر
2. العبارة $-e^{-x}$:

(1) لا تكن أبدا سالبة (2) سالبة دائما
(3) سالبة إذا كان x موجب (4) سالبة إذا كان x سالب

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} =$

(1) $-\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) $+\infty$

4. المعادلة التفاضلية $y = 2y' - 1$ تقبل كمجموعة حلول:

(1) $x \mapsto ke^{2x} - 1$ حيث $k \in \mathbb{R}$

(2) $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$ حيث $k \in \mathbb{R}$

(3) $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$ حيث $k \in \mathbb{R}$

(4) $x \mapsto ke^{2x} + \frac{1}{2}$ حيث $k \in \mathbb{R}$

130 لكل سؤال عين الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة

1. لتكن الدوال f ، g و h للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$h(x) = \frac{x}{\ln x}$ ، $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ ، $f(x) = \ln(x - 2)$

(أ) $f(x)$ و $g(x)$ لهما معنى من أجل كل عدد حقيقي x .

(ب) $h(x)$ لها معنى إذا كان $x > 0$.

(ج) $f(3) = 0$.

(د) $h(e) = e$.

(هـ) من أجل كل $x > 2$: $\frac{f(x)}{g(x)} = \ln \frac{x-2}{x^2+1}$

2. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$

(أ) f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و إشارة $f'(x)$ هي من

نفس إشارة $g(x) = x^2 + 2 + 2 \ln x$

(ب) على $]0; +\infty[$ إشارة g' هي إشارة $x - 1$.

(ج) على $]0; +\infty[$ g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3.

(د) f متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

(هـ) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha \in]1; 2[$

أصحيح أم خاطئ؟

131 هل العبارات التالية صحيحة أو خاطئة؟ برّر الجواب

(1) الدالة $f: x \mapsto \ln(2-x)$ معرفة على $]2; +\infty[$

(2) الدالة $f: x \mapsto \ln(-2x)$ متناقصة تماما على $]0; +\infty[$

(3) إذا كانت $f(x) = \ln(3-3x)$ على $]0; 1[$ فإن :

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}$$

(4) إذا كانت الدالة f متزايدة تماما و موجبة على مجال D

فإن $\ln f$ متناقصة على D .

(5) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق و موجبة على مجال D

$$\text{فإن } (\ln |f|)' = -\frac{f'}{f}$$

(6) f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x^2 \ln x$

العدد المشتق للدالة f عند e هو $3e$

132 اذكر دون تبرير إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة.

(1) الدالة $\ln$ موجبة تماما على $]1; +\infty[$.

(2) الدالة $f: x \mapsto \ln[-x(x+1)]$ معرفة

على $]0; 1[$ (3) الدالة $f: x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ متناقصة

تماما على $]1; +\infty[$.

(4) المعادلة $\ln x^2 = \ln(3x+4)$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

(5) إذا كانت $f(x) = x \ln x$ فإن $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

(6) المتراجحة $1 + \ln(2-x) \geq 0$ تقبل كمجموعة حلول

المجال $]2; +\infty[$.

133 حدّد إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة ، برّر الأجوبة.

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$.

(1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \times f(-x) \leq 0$

(2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) + f(x) = e^{-x}$

(3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \leq e^{-1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$

(5) الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند $x = 1$.

(6) الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = -y$

الكفاءات المستهدفة

- ◆ معرفة و تفسير النهايات الشهيرة الخاصة بالدوال الأسية و اللوغاريتمية.
- ◆ حل مشكلات بتوظيف دوال القوى.

مبدأ باريتو

في سنة 1875 م اكتشف باريتو (اقتصادي ايطالي 1848 - 1923) القانون الذي يحمل اسمه من خلال دراسة توزيع مداخل العائلات بسويسرا كما أسفرت دراسات مماثلة في دول أخرى على أن توزيع المداخل يخضع لنفس القانون. عدد العائلات N التي مداخل كل منها r في مجتمع ما هو دالة متناقصة بدلالة r يعبر عنها بعلاقة من الشكل $N = \frac{k}{r^a}$ حيث a و k ثابتان موجبان مرتبطان بالمجتمع المدروس. يمكن تطبيق قانون باريتو مثلا على توزيع المؤسسات حسب عدد عمالها أو على توزيع المراكز الهاتفية حسب عدد المنخرطين.

مساحة جلد حيوان

من الغريب التفكير في حساب مساحة جلد حيوان و هو حي ! لكن يصبح الأمر يسيرا إذا علمت أن لمساحة جلده علاقة بوزنه و هو ما اكتشفه كل من كيبلار ، برودي و ووستال سنة 1947. إذ أنهم بعد تجارب و دراسات توصلوا الى الدالة التالية التي تربط المساحة A بالسنتيمتر المربع بالوزن P بالغرام:

$$A = 9,85 p^{0,64}$$

- (1) أدرس تغيرات الدالة $A(p)$ ، $p \mapsto A(p)$.
- (2) عين $\ln A$ بدلالة $\ln p$ ثم مثل بيانيا الدالة $\ln A(p)$ ، $\ln p \mapsto \ln A(p)$.
- (3) ما هي نظريا ، مساحة جلد حيوان وزن 750 غراما ؟

نشاط أول

(1) تعريف القوى الحقيقية للعدد 3

- ليكن n عددا صحيحا نسبيا.
- أكتب العدد $\ln(3^n)$ بكيفية أخرى ثم استنتج أن $3^n = e^{n \ln 3}$.
- الدستور $3^n = e^{n \ln 3}$ يمنحنا فكرة تمديد مفهوم القوى. هذا التمديد يفرض علينا طرح السؤال التالي: كيف يمكن تعريف 3^x من أجل كل عدد حقيقي x ؟

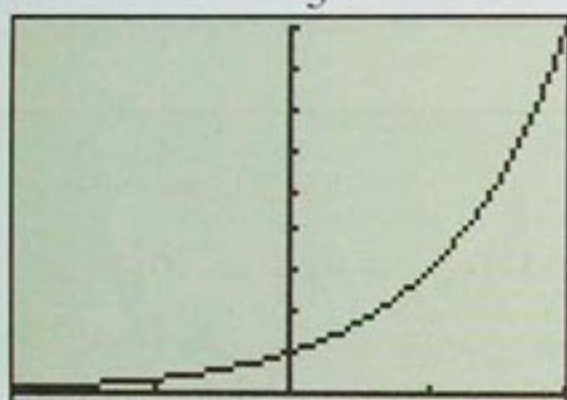
- نضع، تعريفاً، من أجل كل عدد حقيقي x ، $3^x = e^{x \ln 3}$.
- عين، باستعمال حاسبة، المدور إلى 10^{-2} لكل عدد من الأعداد التالية:

$$3^{\sqrt{2}}, \quad 3^{-\frac{2}{5}}, \quad 3^e, \quad 3^{\frac{1}{3}}$$

(2) بعض الدساتير

بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x, y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ،

$$(3^x)^n = 3^{nx} \quad (\text{ب}) \quad 3^x \times 3^y = 3^{x+y} \quad (\text{أ}) \quad \frac{3^x}{3^y} = 3^{x-y} \quad (\text{ج})$$



(3) دالة جديدة

- أرسم على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة $f: x \mapsto 3^x$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة f .
- عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

تعريف: تسمى الدالة $x \mapsto 3^x$ "الدالة الأسية ذات الأساس 3".

نشاط ثان

1. دراسة الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = x^3$

- أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
- أرسم (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

2. المعادلة $x^3 = 3$

- بين أن المعادلة $x^3 = 3$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty[$.
- باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد α .

نتيجة: العدد α هو إذن العدد الموجب الوحيد الذي يحقق: $\alpha^3 = 3$.

يسمى العدد α الجذر التكعيبي للعدد 3 و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[3]{3}$.

تعريف: يمكن تعميم التعريف السابق للحصول على التعريف التالي:

نسمي الجذر التكعيبي للعدد الموجب a العدد الموجب الوحيد الذي مكعبه يساوي a و نرمز عليه بالرمز $\sqrt[3]{a}$.

3. حساب بعض الجذور التكعيبية

• عين الأعداد التالية: $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt[3]{125}$ ، $\sqrt[3]{1000}$ ، $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

• عين حصرا سعة 10^{-2} للعددين: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{11}$.

• برهن العلاقات التالية:

$$\sqrt[3]{16} = 2 \times \sqrt[3]{2} \quad \text{ب) } \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10} \quad \text{ج) } \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{3}$$

4. باستعمال قوى حقيقية للعدد 3

لقد عرفنا في النشاط الأول العدد $3^{\frac{1}{3}}$. بين أن $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$.

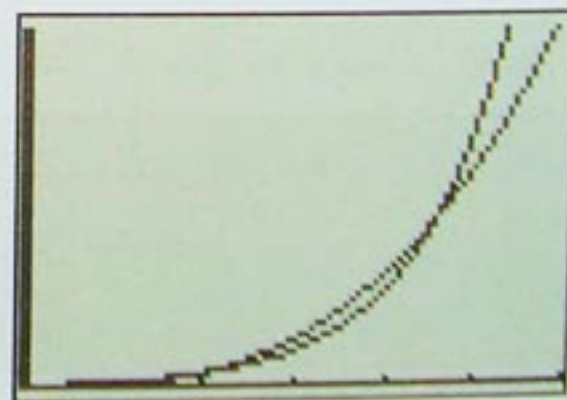
نشاط ثالث

1. أنجز ورقة الحساب الموائية ثم قارن بين الأعداد $\exp(x)$ ، $\ln(x)$ ، x ، x^2 ، ... ، x^{15} .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	exp(x)	ln(x)	x	x^2	x^3	x^4	x^9	x^15
2	0	1	#NOMBRE!	0	1	1	1	1	1
3	20	485165195	2.99573227	20	400	8000	160000	5.12E+11	3.2768E+19
4	40								
5	60								
6	80								
7	100								
8	120								
9	140								
10	160								
11	180								
12	200								

2. رسمنا في ما يلي على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين الممثلين للدالتين $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x^3$.

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=6
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=200
Yscl=1
Xres=1
```



خمن الأوضاع النسبية للمنحنيين السابقين من أجل القيم الموجبة للمتغير x . يمكنك تغيير النافذة للحصول على وضعيات أخرى.

3. نعتبر الدوال $x \mapsto \ln x$ ، $x \mapsto x^2$ ، $x \mapsto x$ و $x \mapsto \ln x$.

• بعد تمثيل هذه الدوال على شاشة حاسبة بيانية ضع تخمينات حول أوضاعها النسبية.

• قارن بين $\ln x$ و x ثم بين $\ln x$ و x^2 من أجل قيم كبيرة للمتغير x .

١. قوى عدد حقيقي موجب تماما

تمهيد: ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما و ليكن n عددا صحيحا نسبيا.

نعلم أن $\ln(a^n) = n \ln a$ و بالتالي $a^n = e^{n \ln a}$.

وبما أن $\ln e = 1$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x = e^{x \ln e}$.

1. تعاريف

تعريف 1: نضع $a^b = e^{b \ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ و b كيفي.

ملاحظة: يقرأ a^b : a أس b أو " a قوى b ".

مثال: $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx 3,3219$

تعريف 2: a عدد حقيقي موجب تماما.

تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ ، الدالة الأسية ذات الأساس a .

2. قواعد الحساب

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ، b و من أجل كل عددين حقيقيين x ، y لدينا:

$$\ln(a^x) = x \ln a \quad (1) \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad (2) \quad a^{-y} = \frac{1}{a^y} \quad (3) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (4)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (5) \quad (ab)^x = a^x b^x \quad (6) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (7)$$

البرهان: أنظر التمرين رقم 6 (يتم إنجاز مختلف البراهين باستعمال العلاقة $a^x = e^{x \ln a}$).

x	0	$+\infty$
x^n	0	$+\infty$

3. الدالة "الجذر النوني"

تمهيد: الدالة $f_n: x \mapsto x^n$ ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم،

مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ كما أن $f_n(0) = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. إذن من أجل كل عدد حقيقي موجب a ، المعادلة $x^n = a$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0; +\infty[$.

مبرهنة وتعريف: من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يوجد عدد حقيقي

موجب وحيد b يحقق $b^n = a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$.

تسمى الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ حيث $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ، الدالة الجذر النوني.

مثال: $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{81} = 3$ ، $\sqrt[3]{8} = 2$ ، $\sqrt[4]{1} = 1$ ، $\sqrt[4]{0} = 0$.

خاصية 1: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

البرهان: نعلم أن $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ و بما أن $\sqrt[n]{a}$ هو الحل الموجب الوحيد للمعادلة $x^n = a$ فإن $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: نضع اصطلاحا: $0^{\frac{1}{n}} = 0$.

تمرين محلول 1: اختزل كتابات الأعداد التالية:

$$c = 3^{-\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$$

$$b = (0,25)^{1,5}$$

$$a = 256^{\frac{1}{4}}$$

حل:

$$a = 256^{\frac{1}{4}} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^{8 \times \frac{1}{4}} = 2^2 = 4$$

$$b = (0,25)^{1,5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = (2^{-2})^{\frac{3}{2}} = 2^{(-2) \times \left(-\frac{3}{2}\right)} = 2^3 = 8$$

$$c = 3^{-\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{2 \times \frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} = 3^{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}} = 3$$

تمرين محلول 2:

1. عين الدالة المشتقة للدالة f_n المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty; -1[$ بـ $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

حل:

$$1. \text{ من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[, f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$$

الدالة f_n هي مركب الدالة $x \mapsto \frac{1}{n} \ln x$ متبوعة بالدالة الأسية وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا:

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} e^{\frac{1}{n} \ln x} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n} - 1}$$

القوى ذات أس صحيح.

من الواضح أن من أجل كل x من $]0; +\infty[, f'_n(x) > 0$ و منه فالدالة الجذر النوني متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

2. نلاحظ أن الدالة g هي مركب الدالتين $u: x \mapsto x^2 - 1$ متبوعة بالدالة f_3 . و بما أن الدالة u متناقصة تماماً على $]-\infty; -1[$ و الدالة f_3 متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ فإن الدالة g متناقصة تماماً على $]-\infty; -1[$.

تمرين محلول 3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$(0,31)^{2x} < 3 \quad (2)$$

$$3^x + 2 \times 3^{-x} = 3 \quad (1)$$

حل:

$$1. (1) \text{ تعني } 3^x + \frac{2}{3^x} = 3 \text{ أي } 3^{2x} - 3 \times 3^x + 2 = 0. \text{ بوضع } X = 3^x \text{ نحصل على } X^2 - 3X + 2 = 0$$

ذات الحلين 1 و 2. $3^x = 1$ تعني $\ln 3^x = \ln 1$ أي $x \ln 3 = 0$ و بالتالي $x = 0$.

$$\text{أما } 3^x = 2 \text{ فتعني } x \ln 3 = \ln 2 \text{ أي } x = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \text{ و منه مجموعة الحلول هي } S = \left\{0; \frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$$

$$2. (0,31)^{2x} < 3 \text{ تعني } \ln[(0,31)^{2x}] < \ln 3 \text{ أي } 2x \ln(0,31) < \ln 3 \text{ و هذا يعني أن}$$

$$x > \frac{\ln 3}{2 \ln(0,31)} \text{ لأن } \ln(0,31) < 0 \text{ و بالتالي مجموعة الحلول هي } \left] \frac{\ln 3}{2 \ln(0,31)}; +\infty \right[$$

لدراسة الدوال: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و $x \mapsto a^x$

1. الدالة $x \mapsto a^x$

نضع من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً a و مختلف عن 1 و من أجل x من $\mathbb{R}$ ، $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$ ،

• **اتجاه التغير:** الدالة f_a هي مركب الدالة $u: x \mapsto x \ln a$ متبوعة بالدالة الأسية. و بما أن الدالتين u

و "exp" قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'_a(x) = \ln a \times e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$.

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $a^x > 0$ و بالتالي فإشارة $f'_a(x)$ من نفس إشارة $\ln a$. و منه النتائج التالية:

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ و منه الدالة f_a متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

* إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ و منه الدالة f_a متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

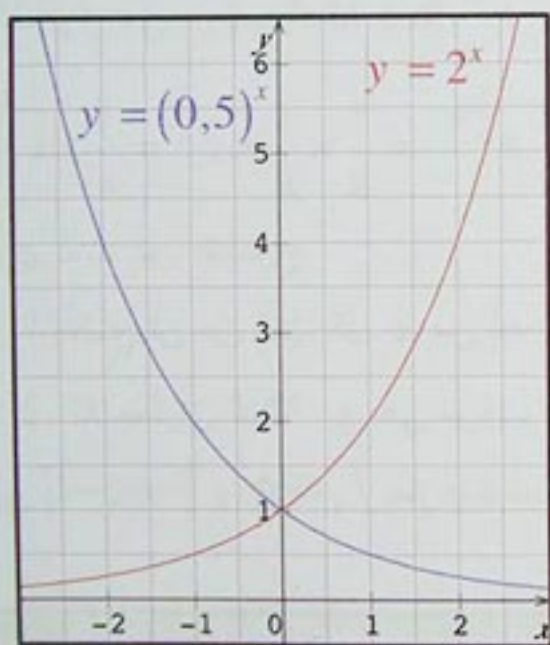
• **النهايات:** نميز حالتين حسب إشارة $\ln a$

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = +\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = +\infty$

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = -\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0$

* إذا كان $a > 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = -\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = 0$

* إذا كان $a > 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = +\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty$



$$\begin{aligned} f_a(1) &= a \\ f_a(0) &= 1 \end{aligned}$$

• **جدول التغيرات و التمثيل البياني:**

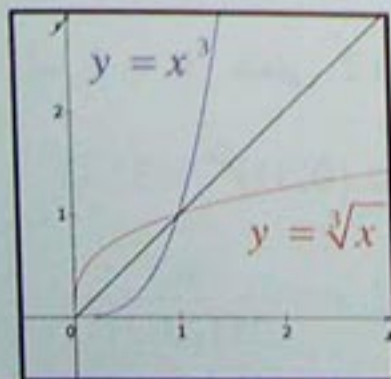
x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $0 < a < 1$	$+\infty$	0
x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $a > 1$	0	$+\infty$

ملاحظة: إذا كان $a = 1$ فإن $f_1(x) = 1$ و منه الدالة f_1 ثابتة.

2. الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، و من أجل x من $[0; +\infty[$ ، $g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ،

g_n قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $g'_n(x) = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$ و منه $g'_n(x) > 0$ إذن g_n متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$



ملاحظة

الدالة g_n غير قابلة للاشتقاق عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln x} = +\infty$$

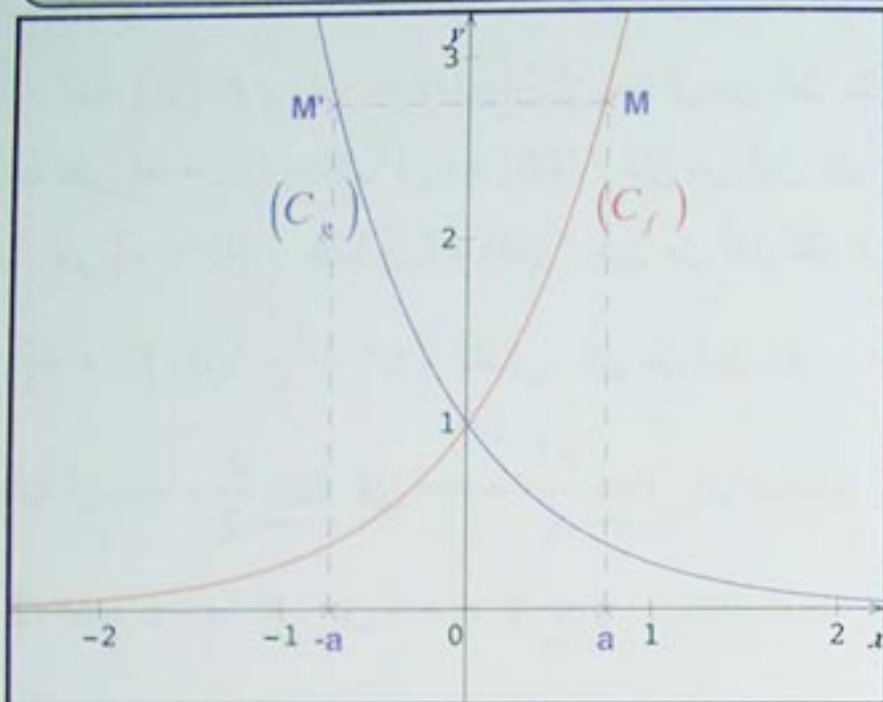
x	0	$+\infty$
$g'_n(x)$	$ $	$+$
$g_n(x)$	0	$+\infty$

تمرين محلول 1:

1. أرسم في معلم متعامد و متجانس المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين على التوالي للدالتين f و g حيث:

$$g(x) = (0,25)^x \quad \text{و} \quad f(x) = 4^x$$
2. بين أن المنحنيين (C_g) و (C_f) متناظران بالنسبة إلى محور الترتيب (y, y) .

طريقة: لإثبات أن المنحنيين (C_g) و (C_f) متناظران بالنسبة إلى (y, y) يمكننا أن نبين أن:
 $g(-x) = f(x)$ أو $f(-x) = g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.



حل:

1. الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

الدالة g متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2. من أجل كل a من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$g(-a) = (0,25)^{-a} = e^{-a \ln(0,25)}$$

$$g(-a) = e^{-a \ln \frac{1}{4}} = e^{a \ln 4} = 4^a = f(a) \quad \text{و} \quad g(a) = (0,25)^a = e^{a \ln(0,25)} = e^{-a \ln 4} = \frac{1}{4^a} = f(-a)$$

تمرين محلول 2: أكتب العبارات التالية بواسطة أس ناطق.

$$h(x) = \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}} \quad (3) \quad g(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+1} \quad (2) \quad f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} \quad (1)$$

حل:

$$1. f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} = (x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{1+\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$2. g(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+1} = (x^2+2x+1)^{\frac{1}{3}} = [(x+1)^2]^{\frac{1}{3}} = (x+1)^{2 \times \frac{1}{3}} = (x+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$3. h(x) = \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}} = \frac{x+1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}} = (x+1)(x+1)^{-\frac{1}{4}} = (x+1)^{1-\frac{1}{4}} = (x+1)^{\frac{3}{4}}$$

تمرين محلول 3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$\sqrt[3]{x+1} \leq 2 \quad (2) \quad \sqrt[3]{x} = 4 \quad (1)$$

حل:

1. مجموعة تعريف (1) هي $[0; +\infty[$.

من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، (1) تعني $x = 4^3$ و منه مجموعة الحلول هي $S = \{4^3\}$.

2. مجموعة تعريف (2) هي $[-1; +\infty[$.

من أجل كل x من $[-1; +\infty[$ ، (2) تعني $x+1 \leq 2^5$ أي $x \leq 2^5 - 1$ و بالتالي $x \leq 31$.

مجموعة الحلول هي إذن: $S = [-1; 31]$.

1. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto e^x$

خواص: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (1) و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ (2)

البرهان:

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. لدينا من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ،
 $f'(x) = e^x - x$ و $f''(x) = e^x - 1$. بما أن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f''(x) \geq 0$ فإن الدالة f' متزايدة
 تماماً على $[0; +\infty[$ و علماً أن $f'(0) = 1$ فإن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f'(x) \geq 0$ و منه فالدالة f متزايدة
 تماماً على $[0; +\infty[$ و علماً أن $f(0) = 1$ فإن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f(x) \geq 0$. نستنتج أنه من أجل كل x
 من $[0; +\infty[$ ، $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$ و بالتالي فإن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$. باستعمال النهايات بالمقارنة
 و علماً أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ كما نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

2. نضع $X = -x$. إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$ و منه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$.

2. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \ln x$

خواص: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (1) و $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (2)

البرهان:

1. من أجل $x > 0$ نضع $X = \ln x$ و منه $x = e^X$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.
 2. نضع $X = \frac{1}{x}$ و منه $\lim_{x \rightarrow 0} X = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$.

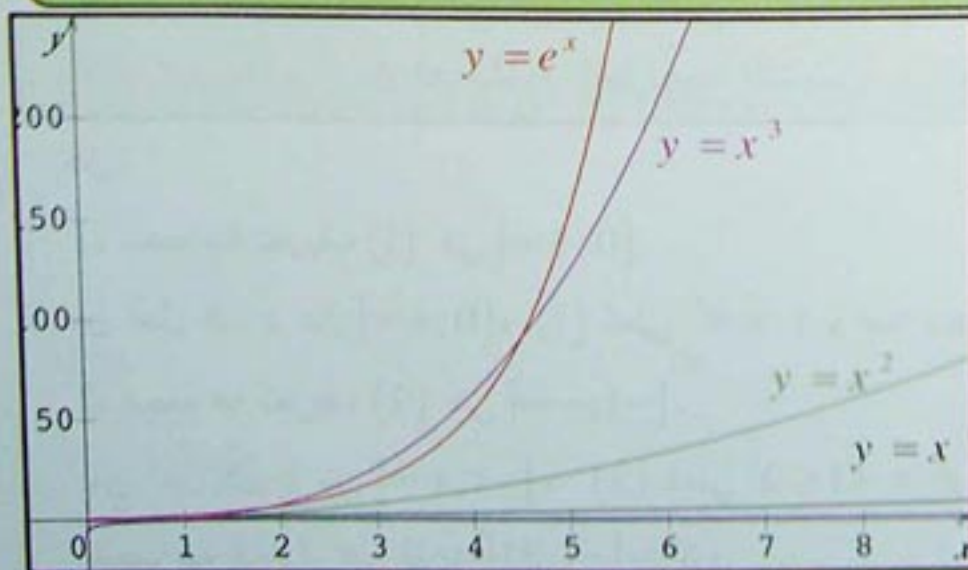
3. التزايد المقارن مع الدالة $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

خواص: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ (1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$ (2)

البرهان: انظر التمرين رقم 39

خلاصة: كل الدوال $x \mapsto \ln x$ ، $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) تتحول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف.

عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة و تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.



$y = \ln x$

تمرين محلول 1: أحسب النهايتين التاليتين:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) \quad (1)$$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

حل:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ و من ثم } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2xe^x - e^x) = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

تمرين محلول 2: أحسب النهايتين التاليتين:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) \ln x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad (1)$$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

حل:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{\ln x}{x} \right] = +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و من ثم } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{\ln x}{x} \right] = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x + 2 \ln x) = -\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

تمرين محلول 3: أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \ln x \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 1)e^x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2 - x + 3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x + 1} \quad (1)$$

حل:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{x^2}{2x^2 - x + 3} = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - x + 3} = \frac{1}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^x + 2x e^x - e^x) = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x + x \ln x) = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$$

تمرين محلول 4: أحسب النهاية التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 1)e^x - 3e^{2x}]$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 1)e^x - 3e^{2x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(2 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3 \right) = -\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$$

دراسة دالة لوغاريتمية

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x + 1 + \ln x$

1. عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للعدد α سعته $0,01$.
5. حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}, \quad f(0) = 0$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$ حيث وحدة الأطوال هي $4cm$.

1. بين أن الدالة f مستمرة على $]0; +\infty[$.
2. هل تقبل الدالة f الاشتقاق عند 0 ؟ فسر بيانيا النتيجة.
3. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .
4. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. تحقق أن $f(\alpha) = \alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
5. ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $\ln x \mapsto x$ في المعلم $(O; I, J)$.
 - أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C) و (Γ) .
 - أحسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$. فسر بيانيا النتيجة. أرسم المنحنيين (C) و (Γ) .

مسألة استمثال

ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $\ln x \mapsto x$ في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

مسألة: نهدف إلى تعيين (إن وجدت) نقط المنحني (Γ) الأقرب من المبدأ O .

1. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x^2 + \ln x$
 - عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.
 - أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$. عين قيمة مقربة للعدد α .
 - حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$
 - أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. حل المسألة المطروحة.

مقارنة الأعداد الطبيعية n^{n+1} و $(n+1)^n$

الهدف: مقارنة العددين الطبيعيين n^{n+1} و $(n+1)^n$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. علما أن التعامل مع القوى غالبا ما يتطلب إدخال اللوغاريتم بين أن:

$$\frac{\ln(n)}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} \quad \text{يعني} \quad n^{n+1} > (n+1)^n$$

2. اختر دالة مناسبة يمكن أن تسمح دراسة اتجاه تغيراتها من المقارنة بين العددين $\frac{\ln(n)}{n}$ و $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$

أدرس تغيرات هذه الدالة ثم استنتج.

الدوال $(\alpha \in \mathbb{R}) x \mapsto x^\alpha$

نعتبر الدالة f_α المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad \text{حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي.}$$

1. ماذا يمكن القول عن الدالة f_α في حالة $\alpha = 0$ ؟ في حالة $\alpha = 1$ ؟

في ما يلي نفرض $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq 1$.

2. أدرس نهايتي الدالة f_α عند 0 و عند $+\infty$. نميز الحالتين: $\alpha < 0$ و $\alpha > 0$.

3. بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. ماذا تلاحظ ؟

4. نفرض $\alpha < 0$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f_α ثم شكل جدول تغيراتها.

- أرسم (C_α) التمثيل البياني للدالة f_α في الحالات التالية:

$$\alpha = -2, \alpha = -1, \alpha = -\frac{1}{2}, \alpha = -0,3$$

5. نفرض $\alpha > 0$ و نعتبر الدالة g_α المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g_\alpha(x) = f_\alpha(x) - \alpha \ln x, \quad x \in]0; +\infty[$$

- عين نهاية الدالة g_α عند $+\infty$.

- بين أن الدالة g_α مستمرة عند 0.

- أدرس قابلية اشتقاق الدالة g_α عند 0. نميز الحالتين: $0 < \alpha < 1$ و $\alpha > 1$.

- أدرس اتجاه تغير الدالة g_α ثم شكل جدول تغيراتها.

- أدرس النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_\alpha(x)}{x}$. يتم تمييز حالتين. أعط تفسيرا للنتائج.

- أرسم (Γ_α) التمثيل البياني للدالة g_α في الحالات التالية:

$$\alpha = 0,3, \alpha = 0,5, \alpha = 1,5, \alpha = 2$$

نموذج ديموغرافي

نهدف إلى نمذجة تطور مجتمع من الطفيليات في زراعة بأحد الحقول.
نرمز بـ $N(t)$ إلى عدد الطفيليات بالمئات عند اللحظة t (بالأيام).
أسفرت بعض الملاحظات على النتائج التالية:

t	0	1	3	6	10
$N(t)$	10	11	12	15	18

- فريق أول من البيولوجيين نمذج هذا التطور بالدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(t) = 10 \times (1,07)^t$$

- و نمذج فريق ثان نفس التطور السابق بالدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(t) = \frac{100}{1 + 9 \times (1,07)^{-t}}$$

1. دراسة بيانية

- باستعمال جداول حاسبة بيانية و باختيار الخطوة 1 عين قيم الدالتين f و g على المجال $[0; 10]$.
- في معلم متعامد (الوحدات: $1cm$ يمثل يوما واحدا على محور الفواصل و $1cm$ يمثل مائة من الطفيليات على محور الترتيب و نبدأ التدرج ابتداء من 9 على محور الترتيب) مثل جدول القيم السابق و الجداول المحصل عليها بالحاسبة.

2. دراسة الدالة f

- أشرح لماذا الفريق الأول يعتبر أن عدد الطفيليات يرتفع يوميا بنسبة 7%.
- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.
- أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.
- أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة f على المجال $[0; 80]$.

3. دراسة الدالة g

- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$.
- أدرس نهاية الدالة g عند $+\infty$.
- أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة g على المجال $[0; 80]$.

4. التركيب:

قارن بين النموذجين المقترحين من قبل كل فريق من فريق البيولوجيين.

يستعمل الفريق الأول نموذج "Malthus" و الذي يعتبر أن نسبة التطور تبقى ثابتة بينما يعمل الفريق الثاني وفق نموذج "Verhulst" الذي يفرض أن نسبة التطور تنقص و من ثم لا يتعدى المجتمع حدا معينا.

تعيين دالة: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = (ax + b)e^{\frac{x}{3}} + 3 \quad \text{حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان.}$$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; I, J)$ حيث وحدتا الطول هما $1cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور الترتيب.

1. أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من $[0; +\infty[$.
2. عين a و b علما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند 4 و أن النقطة $A(0; 2)$ تنتمي إلى المنحني (C)

دراسة دالة: نفرض في ما يأتي $a = 1$ و $b = -1$. لدينا إذن:

$$f(x) = (x - 1)e^{\frac{x}{3}} + 3, \quad [0; +\infty[\text{ من } x \text{ كل}$$

1. أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادله له.
2. حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) .
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
4. أعد رسم الجدول الموالي ثم أملئه (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

5. أرسم المستقيم المقارب (Δ) و المنحني (C) .

دراسة اقتصادية: سجلت في الجدول الموالي مبالغ فواتير استهلاك الهاتف (سنويا) مقدرة بعشرات الآلاف

من الدنانير من قبل إحدى الثانويات بحيث يمثل x_i رتبة السنة بينما يمثل y_i مبلغ فاتورة تلك السنة.

السنة	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65	3,55	3,50

نبحث عن دالة تسمح بنمذجة هذه الظاهرة بشكل مناسب.

$$\text{نقول عن دالة } f \text{ أنها مقبولة إذا كان من أجل كل } x_i, |f(x_i) - y_i| \leq 0,1$$

1. مثل في المعلم السابق $(O; I, J)$ النقط $M_i(x_i; y_i)$.
2. بين أن الدالة f مقبولة لنمذجة الظاهرة السابقة.
3. صرح المسير المالي للثانوية أنه لو استمر تطور استهلاك الهاتف وفق النموذج السابق فإنه يترقب أن مبلغ الفاتورة سوف لا يتعدى مستقبلا $30000 DA$. هل أنت موافق مع هذا التصريح؟ علل إجابتك.

تمرين : (من بكالوريا)

I. دالة معرفة على $\mathbb{R}^{++}$ بـ $f(x) = x(\ln x)^2$

1. بين أنه من أجل $x > 0$ $f(x) = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$

ب- عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

2. بين أن f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة و أحسب $f'(x)$

3. ادرس تغيرات f .

4. ليكن $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

الوحدة: 20cm. أنشئ $\mathcal{C}$ على المجال $]0;1]$.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^{++}$ بـ $g(x) = -2x \ln x$

Γ تمثيلها البياني في نفس المعلم.

1. عين نهايات g عند حدود مجموعة تعريفها.

2. ادرس تغيرات g .

3. أ- بين أنه من أجل كل $x > 1$ $f(x) - g(x) = xf'(x)$

ب. استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}$ و Γ .

4. أنشئ Γ على المجال $]0;1]$ في نفس المعلم.

III. ليكن $x_0 \in]0;+\infty[$

1. بين أن معادلة المماس T لـ $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها x_0

هي $y = xf'(x_0) + g(x_0)$

ما هما إحداثيتي نقطة تقاطع المماس T مع محور الترتيب؟

2. استعمل السؤال السابق لإعطاء طريقة لإنشاء المماس T .

تطبيق : أنشئ المماس للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها

0,6

تعاليف

I. 1. أنضع $X = \sqrt{x}$ و نطبق

نهاية مركب دالتين

1. ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2. طبق مشتق جداء دالتين

II. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

II. 3. أ- يمكن التحقق بسهولة

III. 1. لاحظ أن

$f(x_0) - g(x_0) = x_0 f'(x_0)$

2. نقطة تقاطع المماس T مع محور

الترتيب فاصلتها 0 و ترتيبها

إذن $0 f'(x_0) + g(x_0) = g(x_0)$

إحداثيتي نقطة التقاطع $(0; g(x_0))$

• المماس T عند النقطة M_0 التي

فاصلتها x_0 من $\mathcal{C}$ يمر بـ M_0

و يقطع محور الترتيب في النقطة التي

إحداثياتها $(0; g(x_0))$

حل مختصر

I. 1. أ- نستعمل $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ و $x = \sqrt{x}^2$

2. $f'(x) = \ln x (\ln x + 2)$

3.

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$4e^{-2}$	0	$+\infty$	

4. انظر الشكل

II. 2. $g'(x) = -2(\ln x + 1)$. الدالة g متزايدة تماما على $]0; e^{-1}]$

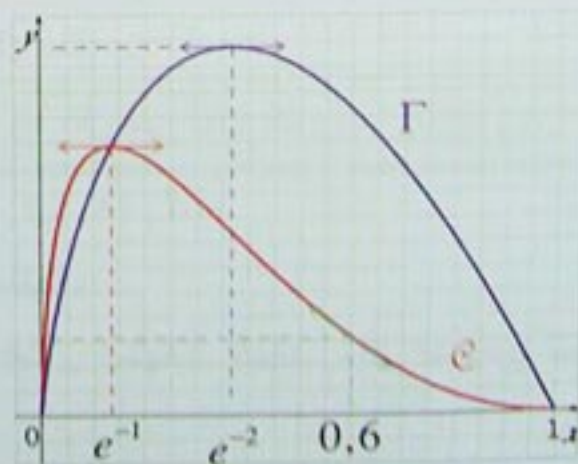
و متناقصة تماما على $]e^{-1}; +\infty[$ و تتعدم من أجل $x = e^{-1}$

3. ب- $\mathcal{C}$ و Γ يتقاطعان في النقطتين اللتين إحداثيتاهما $(e^{-2}; 4e^{-2})$ و $(1; 0)$

$\mathcal{C}$ فوق Γ في المجالين $]0; e^{-2}]$ و $]1; +\infty[$ و تحت Γ في $[e^{-2}; 1]$

III. لإنشاء T ، نمثل النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ ، نمثل النقطة $A(0; g(x_0))$ ثم

نربط بين النقطتين.

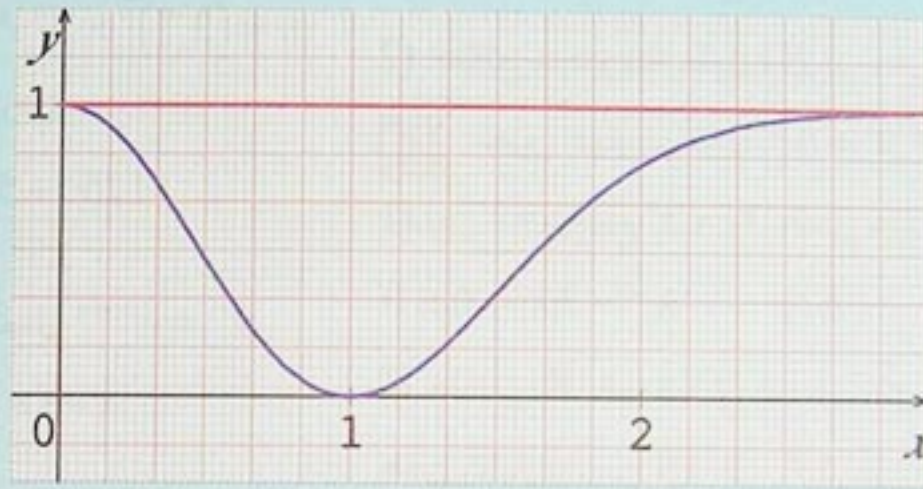


الشكل

نحن بصدد تطبيق القواعد العملية التي رأيناها في الدرس على مثال يهدف إلى حساب مشتقة أو تعيين نهاية.
يجب ألا نكتفي بمعرفة القواعد معرفة جيدة فحسب بل ينبغي أيضا تفعيلها و إدراك الوضعيات التي تطبق فيها.

تمرين: (من بكالوريا)

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}$
تمثيلها البياني (C) و وستقيمها المقارب Δ الذي معادلته $y = 1$ ممثلان في الشكل التالي:



1. برّر الخواص التالية المقروءة على التمثيل البياني:

أ- المستقيم Δ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ب- المنحني (C) تحت المستقيم Δ على $[0; +\infty[$.

ج- الدالة f متناقصة على $[0; 1]$ و متزايدة على $[1; +\infty[$.

2. k عدد حقيقي معطى. عين عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ على المجال $[0; +\infty[$.

توجيهات

1. أ- برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. عبارة $f(x)$ تجعلك تفكر في القواعد العملية للتزايد

المقارن عند $+\infty$ لـ e^x و x^n و لكن هنا لا تطبق هذه القواعد مباشرة.

ب - ادرس إشارة $f(x) - 1$

ج- احسب مشتقة الدالة f مستعملا العمليات على اشتقاق مجموع ، جداء و مركب

دالتين. حلل $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

2. يمكنك تشكيل جدول تغيرات الدالة f أو استعمال المنحني (C).

تمارين تطبيقية

1 - قوى عدد حقيقي موجب تماما

1 باستعمال الحاسبة ، رتب الأعداد التالية:

$$3^{-\sqrt{2}}, 20736^{0.25}, 12^{\sqrt{3}}, 5^{3.6}$$

2 رتب ترتيبا تصاعديا الأعداد التالية:

$$100^{\frac{1}{12}}, 80^{\frac{1}{9}}, 13^{\frac{1}{2}}, 15^{\frac{1}{4}}, 28^{\frac{1}{3}}$$

3 اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

$$a = 5^{\frac{1}{\ln 5}}, b = 2^{\frac{1}{\ln 8}}, c = 5^{\frac{1}{\ln 25}}$$

4 اكتب الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 3

$$a = 9^{\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{4}}, b = 3^{\frac{5}{4}} \times 81^{\frac{5}{3}}, b = (3^{-4})^{\frac{1}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}}$$

5 x عدد حقيقي ، بسط العبارات التالية:

$$(1) 9^x + 2 \times 3^{2x+1} \quad (2) \frac{125^x + 5^{3x+1}}{25^x}$$

6 للبرهان على هذه الخواص نستعمل $a^x = e^{x \ln a}$

مع تطبيق الخواص الجبرية للدالة $e^x \mapsto x$

مثلا للبرهان أن $a^x a^y = a^{x+y}$ لدينا:

$$a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}$$

7 حل المعادلات التالية:

$$(1) 12^x = 3 \quad (2) \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8}$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 \quad (4) 5^{x-1} = 2^x$$

$$(5) 3^x = 4^{2x+1} \quad (6) 5^{1-3x} = \frac{1}{125}$$

8 نعتبر المعادلة (E) التالية: $2^{x^2-6x} = 128$

1. بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $x^2 - 6x - 7 = 0$

2. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

9 حل المعادلتين التاليتين:

$$(1) \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-3x} = 49 \quad (2) (\sqrt{5})^{3-x^2} = 5^x$$

10 نعتبر المعادلة (E) التالية: $4^x + 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

1. بين أنه بوضع $X = 2^x$ المعادلة (E) تؤول إلى

$$\text{المعادلة } (E') \dots X^2 + 3X - 4 = 0$$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E'). استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

11 حل المعادلتين التاليتين:

$$(1) -2.9^x 5.3^x = 2 \quad (2) 2.5^x - 5^{1-x} = 9$$

12 حل المتراجحات التالية:

$$(1) 3^x > 5 \quad (2) (\sqrt{3})^x < e \quad (3) \pi^x > 2$$

$$(4) 5^{-x} < 5^{2x} \quad (5) \frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3} \quad (6) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \leq 2$$

13 نعتبر المتراجحة (E) التالية: $2^{x^2+4} \geq 2^{5x}$

(1) بين أن (E) تكافئ المتراجحة $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

(2) استنتج مجموعة حلول (E).

14 نعتبر المتراجحة $3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 6 \leq 0$

(1) بين أنه بوضع $X = 3^x$ المتراجحة (E) تؤول إلى

$$X^2 - 7X + 6 \leq 0 \dots (E')$$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E'). استنتج مجموعة حلول (E).

• في التمارين من 15 إلى 17 حل المعادلة و المتراجحة

المقترحتين

$$15 \quad (1) 4^x + 2^{x+1} - 3 = 0 \quad (2) 4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$$

$$16 \quad (1) 2^{2x+1} - 10 \cdot 2^x + 12 = 0$$

$$(2) 2^{2x+1} - 10 \cdot 2^x + 12 > 0$$

$$17 \quad (1) 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7 \quad (2) 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} \geq 7$$

$$(2) 2^{2x+1} - 10 \cdot 2^x + 12 > 0$$

$$18 \quad (1) \text{ احسب المجموع } S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

بدلالة n .

(2) من أجل قيم للعدد n يكون $S_n \geq 10^{10}$ ؟

19 عند رمي قطعتي نقد متزنيتين n مرة (n عدد طبيعي

أكبر أو يساوي 1)، احتمال عدم الحصول على

$$p_n = \left(\frac{35}{36}\right)^n \text{ هو الثنائية } (6;6)$$

من أجل قيم للعدد n يكون $p_n \leq 0,01$ ؟

20 بسط الأعداد التالية دون استعمال الحاسبة:

$$a = \sqrt[3]{521} \quad b = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{125}$$

$$c = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} \quad d = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3^{12}}$$

21 احسب الأعداد التالية:

$$b = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt[3]{\sqrt{4}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} \quad , \quad a = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{8} \times (\sqrt[3]{\sqrt[3]{4}})^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

• في التمارين من 22 إلى 24 بسط كتابة الأعداد التالية:

22 $A = \sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[7]{2^3}$ $B = \sqrt[3]{2^5} \times (\sqrt[4]{2^7})^2$

23 $A = \frac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}}{8 \cdot \sqrt[8]{4}}$ $B = \sqrt[10]{1024} - 2^{-2} \sqrt[6]{2}$

24 $A = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{27} \sqrt[3]{9^2}}{(\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}}$ $B = 5^{\frac{2}{3}} \sqrt[6]{25}$

25 اكتب الأعداد التالية على شكل أس ناطق

(1) $x \geq 3 : (x-3)^2 \sqrt{x-3}$

(2) $x \geq -2 : \sqrt[8]{(x+2)^3}$

(3) $x \geq -1 : \frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$

(4) $x > 2 : \frac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[2]{2x-4}}$

26 باستعمال المساواة $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

بين أن: $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = 3^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$

27 (1) انشر $(2+\sqrt{2})^3$ و $(2-\sqrt{2})^3$

(2) استنتج تبسيطا للعبارة $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

28 x عدد حقيقي موجب ، اكتب كل من الأعداد التالية

على الشكل $x^{\frac{p}{q}}$:

$$C = x^{-2} (\sqrt{x}) x^{\frac{1}{3}} \quad , \quad B = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[10]{x^3}} \quad , \quad A = \sqrt{\sqrt{x}} \times \sqrt[3]{x}$$

29 حل المعادلات و المترجمات التالية:

(1) $\sqrt{5-3x} > 2$ ، $\sqrt{5-3x} = 2$

(2) $x^{\frac{2}{3}} < x$ ، $x^{\frac{2}{3}} = x$

(3) $\sqrt{x+1} \geq \frac{1}{2}$ ، $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$

30 حل الجملتين التاليتين:

$$\begin{cases} 2^x - 3^y = 5 \\ 3 \cdot 2^x + 3^y = 24 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{3}{4}} = 8 \\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = 40 \end{cases}$$

31 نعتبر المعادلة (E) التالية: $x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{1}{5}} - 6 = 0$

(1) بين أنه بوضع $X = x^{\frac{1}{5}}$ المعادلة (E) تؤول إلى

المعادلة $(E') : X^2 + X - 6 = 0$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E') . استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) .

2 - دراسة الدوال: $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto a^x$

32 عين مشتقات الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$

(1) $x \mapsto 3^x$ (2) $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (3) $x \mapsto \left(\frac{4}{5}\right)^x$

33 ادرس النهاية عند $-\infty$ وعند $+\infty$ للدالتين التاليتين:

(1) $f(x) = (0,25)^x$ (2) $f(x) = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^x$

34 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

1. ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

2. عين الدالة المشتقة للدالة f .

ب- استنتج تغيرات الدالة f .

35 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = (0,7)^x$ و $g(x) = (1,2)^x$

1. شكل جدول تغيرات الدالتين f و g .

2. ارسم المنحنيين الممثلين للدالتين f و g في معلم متعامد

و متجانس.

36 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x}$

1. بين أن f هي مركب دالة كثير حدود و دالة أسية ذات

أساس a .

2. ادرس ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

37 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{3^{2x}}{2^x}$

ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

38 نعتبر المعادلة (E) التالية: $2^x + 3^x = 5^x$

1. بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $1 = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$

2. ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

3 - التزايد والمقارن

39 1.1- بين أن: $\frac{e^x}{x^n} = e^{x-n \ln x}$

ب- احسب نهاية $x - n \ln x$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

ج- استنتج نهاية $\frac{e^x}{x^n}$ لما x يؤول إلى $+\infty$

2.1- اوضع $U = x^n$ ، بين أن: $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln U}{U}$

ب- استنتج نهاية $\frac{\ln x}{x^n}$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

3.1- اوضع $U = \frac{1}{x}$ ، بين أن $x^n \ln x = -\frac{\ln U}{U^n}$

ب- استنتج نهاية $x^n \ln x$ لما x يؤول إلى 0.

4.1- اوضع $U = -x$ ، بين أن $x^n e^x = (-1)^n \frac{U^n}{e^U}$

ب- استنتج نهاية $x^n e^x$ لما x يؤول إلى $-\infty$

40 ادرس النهاية عند $+\infty$ للدالتين التاليتين:

(1) $f(x) = x^2 + 1 - e^x$ (2) $f(x) = \frac{e^x - x}{x^2}$

41 باستعمال تبديل المتغير ، ادرس النهاية عند $+\infty$

للدالتين التاليتين

(1) $f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x}$ (2) $f(x) = \frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

• في التمارين من 42 إلى 44 عين النهاية عند $+\infty$

للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ،

42 (1) $f(x) = x^2 + x - \ln x$ (2) $f(x) = \frac{\ln x - 2x}{4x^2}$

43 (1) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ (2) $f(x) = \frac{\ln(x^2+x)}{x}$

44 (1) $f(x) = e^x - x^3$ (2) $f(x) = x^3 - \ln x$

45 احسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

46 احسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 2}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \ln x}{x^2 + x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{e^{-2x}}$ (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+2x)e^{3x}$

47 1. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (2x-1)e^x$

عين نهاية f عند $-\infty$

2. g دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $g(x) = \sqrt{x}e^{-2x}$

عين نهاية g عند $+\infty$.

48 احسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x} - x^2 + 1)$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 1)e^{3x-1}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x} - x^2 + 1)$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{\ln x}$

49 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. ادرس نهايات f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2. ادرس تغيرات f . شكل جدول تغيراتها.

3. ارسم المنحني الممثل للدالة f في معلم متعام ومتجانس.

50 احسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^3$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 - x)$

51 احسب النهايات التالية:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) - 2 \ln |2x+1|$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x)e^x$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 + e^{2x} - e^x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} - x - 4 \ln(x+1)^2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2 + e^x}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+3)e^x - e^{2x}$

52 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{3^x}{x^2}$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب) ادرس نهاية الدالة f عند 0.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{e^{x \ln 3}}{[x \ln 3]^2} \times [\ln 3]^2$$

استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

53 عين مجموعة قابلية الاشتقاق للدالة f ثم

احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad (2) \quad f(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x}} \quad (1)$$

54 دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - 6\sqrt[3]{x}$

بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ وأن من أجل كل

$$x \in]2\sqrt{2}; +\infty[\quad f'(x) > 0.$$

55 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. عين $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم شكل جدول تغيرات f .

3. عين معادلة المماس للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 4.

56 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sqrt[3]{1+2x^2}$

1. بين أن الدالة f زوجية.

2. ادرس نهاية f عند $+\infty$. استنتج نهاية f عند $-\infty$.

3. بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ احسب $f'(x)$.

4. استنتج تغيرات الدالة f .

57 دالة معرفة على $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}$

1. ادرس نهاية f عند $+\infty$ و عند 1.

3. بين أن f قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ احسب $f'(x)$.

3. استنتج تغيرات الدالة f .

4. ارسم المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

58 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 e^{-x}$

1. عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. ادرس تغيرات f و شكل جدول تغيراتها.

3. ارسم التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

59 إليك نص سؤال ، و الإجابة المقترحة من طرف تلميذ

أعد صياغة هذا الحل أخذا بعين الاعتبار ملاحظات

المصحح.

السؤال: دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 3)}{x}$$

ادرس نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

إجابة التلميذ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 3)}{x} = \frac{\ln 3}{0} = +\infty$$

ترميز خاطئ

* من أجل $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln x^2 (1 + \frac{3}{x^2})}{x} \\ &= \frac{\ln x^2 + \ln(1 + \frac{3}{x^2})}{x} \\ &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{3}{x^2})}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{ماهي نهاية } \frac{\ln(1 + \frac{3}{x^2})}{x} \text{ عند } +\infty?$$

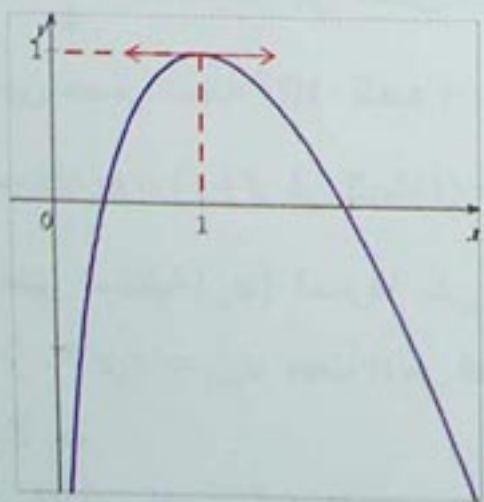
تمارين للتعمق

60 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = ax + (bx + c) \ln x$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية و (c) هو المنحني الممثل



للدالة f

1. باستعمال المنحني (c) و علما أن $f(2) = 2 - 3 \ln 2$

بين أن $a = c = 1$ و $b = -2$

2. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ

$$g(x) = x + (1-2x) \ln x$$

أ- عين نهاية g عند 0.

ب- عين نهاية g عند $+\infty$.

2. أ- عين الدالة المشتقة للدالة g .

ب- ادر على $[0; +\infty[$ إشارة $-2 \ln x$ و إشارة $\frac{1-x}{x}$ ، ثم

استنتج إشارة $g'(x)$ و تغيرات g .

ج- شكل جدول تغيرات g

3. ليكن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$

أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(1-2x) \ln x = 0$ وأعط تفسيراً

بيانياً لهذه الحلول.

ب- استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

61 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = xe^{-x}$$

نرمز بـ (Γ) إلى التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد

و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة: $10cm$

تجزء 1:

1. أ- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

ج- أنشئ (Γ) .

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m من $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ ،

المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين.

ب- في الحالة $m = \frac{1}{4}$ ، نرمز إلى الحلين بـ α و β حيث

$\alpha < \beta$ ، حين حصرنا سعته 10^{-2} للعدد α .

ج- حل المعادلة $f(x) = m$ في الحالة $m = 0$ و $m = \frac{1}{e}$.

الجزء 2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$u_n = \alpha$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ حيث α هو العدد المعروف في

الجزء 1، ب.

1. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي m ، $u_n > 0$

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ إذا كان الجواب نعم عين

نهايتها.

2. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \ln u_n$

أبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = w_n - w_{n+1}$

ب- نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

بين أن: $S_n = w_0 - w_{n+1}$

ج- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول v_0 ،

$v_0 > 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$

هل توجد قيمة لـ v_0 تختلف عن α حيث من أجل كل عدد

طبيعي $n \geq 1$ يكون لدينا $u_n = v_n$ ؟ إذا كان الجواب نعم

عينها.

62 البحث عن دالة

في الشكل التالي لدينا التمثيل البياني (C) في معلم متعامد

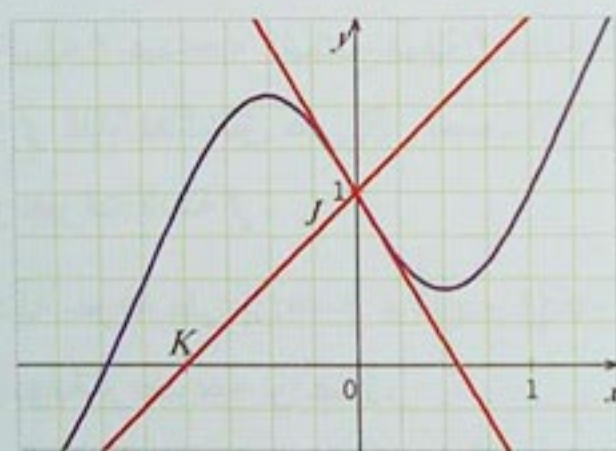
و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق

على $\mathbb{R}$ و كذلك مستقيمه المقارب D و المماس T للمنحني

(C) عند النقطة التي فاصلتها 0. نعلم أن النقطة $J(0; 1)$

مركز تناظر للمنحني (C) و المستقيم D يشمل النقطتين

$K(-1; 0)$ و $J(0; 1)$. المماس T معادلته $y = (1-e)x + 1$.



1. عين معادلة للمستقيم D .

2. نفرض أنه يوجد عددين حقيقيين m و p و دالة φ

معرفة على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \text{ مع } f(x) = mx + p + \varphi(x)$$

أ- بين أن $m = p = 1$.

ب- باستعمال النقطة J ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) + f(-x) = 2$$

ج- استنتج بعد التعبير عن $f(x)$ و $f(-x)$ أن الدالة

φ فردية.

د- استنتج من السؤال ب- أن f' ، مشتقة الدالة f ، زوجية.

3. نفرض الآن أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$$

أ- باستعمال شفعية الدالة φ ، بين أن $b=0$.

ب- احسب $f'(x)$.

ج- مستعملا معامل توجيه المماس T بين أن $a=-e$.

د- استنتج عبارة $f(x)$.

63 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. بين أن المستقيم الذي

معادلته $y=x$ مقارب لمنحني الدالة f عند $+\infty$ (استعمل

$$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. احسب $f'(x)$ من أجل كل $x \in [-1; +\infty[$. استنتج أن

f متزايدة تماما على $[-1; +\infty[$

3. بين أن منحني الدالة f يقبل في النقطة $M(-1;0)$ نصف

مماس مواز لمحور الترتيب.

4. لتكن f'' الدالة المشتقة الثانية للدالة f . بين أنه من أجل

$$f''(x) = 2x(x^3+1)^{\frac{5}{3}} : x \in [-1; +\infty[$$

5. حدد معللا جوابك نقطة انعطاف منحني الدالة

64 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

و (ع) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ و } \|\vec{j}\| = 5cm$$

الجزء 1: لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. ادرس تغيرات g على $\mathbb{R}$ و استنتج إشارة $g(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$.

الجزء 2:

1. أ- احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب- فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

2. أ- احسب $f'(x)$ حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- عين معادلة المماس T للمنحني (ع) عند النقطة التي

فاصلتها 0.

ب- باستعمال الجزء 1، ادرس وضعية المنحني (ع) بالنسبة

للمماس T .

4. ارسم المماس T ، المستقيمات المقاربة و المنحني (ع).

65 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \text{ و } f(0) = 0$$

نرمز بـ (ع) إلى المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد

و متجانس $(O; I, J)$ حيث وحدة الأطوال هي $5cm$.

الجزء 1: نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ

$$g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{1+x^2}$$

1. احسب g' مشتقة الدالة g ، بين أنه من أجل كل

$$g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}, x \in]0; +\infty[$$

2. ادرس إشارة $g'(x)$ حسب قيم x . عين نهايات g عند $+\infty$

و عند 0.

3. شكل جدول تغيرات g .

4. استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $g(\alpha) = 0$.

تحقق أن: $0,5 < \alpha < 0,6$.

استنتج من الأسئلة السابقة إشارة $g(x)$ حسب قيم x . (لا

يطلب إنشاء منحني الدالة g).

الجزء 2:

1. أ- احسب نهاية $xf(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$.

$$(X = \frac{1}{x^2} \text{ يمكن وضع})$$

ب- استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

ج- بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$.

د- شكل جدول تغيرات f على المجال $]0; +\infty[$.

2. بين أن نهاية $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ماذا تستنتج؟

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

ج- عين معادلة المماس للمنحني (ع) عند النقطة O .

3. ارسم (ع).

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الرسم: $2cm$.

1. احسب f' مشتقة f . بين أن إشارة $f'(x)$ هي نفس

إشارة $(1-x^2)$. استنتج تغيرات الدالة f .

2. بين أن : أ- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و استنتج المستقيم المقارب لـ (C).

3. ارسم المنحني (C)، مثل بصفة خاصة النقط من (C)

التي فواصلها $-2, -1, 0, 1$ و 3 .

4. أ- بقراءة بيانية، اذكر، حسب قيم العدد الحقيقي k عدد

حلول المعادلة $f(x) = k$.

ب- بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحدا α . بين أن $\alpha \in [-2; -1]$.

ج- بين أن α يحقق العلاقة: $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. ادرس تغيرات f ، حدد النهايات عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

3. ارسم المنحني (C).

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$g(x) = \ln |e^{\frac{x}{2}} - e^x|$$

نرمز بـ (Γ) إلى تمثيلها البياني.

1. حدد نهايات الدالة g عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ و عند 0 .

2. احسب $g'(x)$ ، و عين إشارتها باستعمال إشارة $f(x)$

و إشارة $f'(x)$. شكل جدول تغيرات f .

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ،

$$g(x) - x = \ln \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} \right)$$

بين أن المستقيم D الذي معادلته $y = x$ مقارب

للمنحني (Γ) .

ادرس وضعية (Γ) بالنسبة إلى D من أجل كل عدد

حقيقي $x > 0$.

4. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي سالب تماما x ،

$$g(x) - \frac{x}{2} = \ln \left(1 - e^{\frac{x}{2}} \right)$$

بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$ مقارب للمنحني (Γ)

ادرس وضعية (Γ) بالنسبة إلى Δ من أجل كل عدد

حقيقي $x < 0$.

5. ارسم (Γ) ، D و Δ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أ- ادرس تغيرات f على $]0; +\infty[$.

ب- عين نهايات f عند حدود مجموعة التعريف.

نرمز بـ T إلى المماس للمنحني (C) عند النقطة التي

فاصلتها I. نريد دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى

المماس T .

2. اكتب معادلة للمستقيم T .

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x - 1 - f(x)$$

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ،

$$g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \left[\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1) \right]$$

ب- احسب $g'(1)$ و ادرس إشارة $g'(x)$ كل من المجالين

$]0; 1[$ و $]1; +\infty[$.

ج- احسب $g(1)$ ، وباستعمال اتجاه تغير الدالة g ، ادرس

إشارة $g(x)$.

د- استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المماس T .

4. ارسم T ثم (C).

I. دالة معرفة على $[0; +\infty[$:-

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(1 + x^2)$$

1. بين أنه على المجال $[1; +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل

حلا واحدا α ، أعط حصر α سعة 10^{-1} .

2. حدد إشارة $g(x) = 0$ على المجال $[0; +\infty[$.

II. دالة معرفة على $[0; +\infty[$:-

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \quad \text{إذا كان } x > 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

1. أ- ما هي نهاية $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ عندما يؤول x إلى 0؟

ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ و جد معادلة

المماس T للمنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي

فاصلتها 0

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$f(x) = 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

ب- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج تغيرات الدالة f .

ج- أنشئ T ثم (C) .

مسائل

I. 1. بين أنه من أجل كل $x > 0$ ، $e^{2x} - 1 > 0$.

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$:-

$$g(x) = \frac{1}{e^{2x} - 1}$$

أ- عين نهايات الدالة g عند 0 و عند $+\infty$. فسر بيانيا النتائج المحصل عنها.

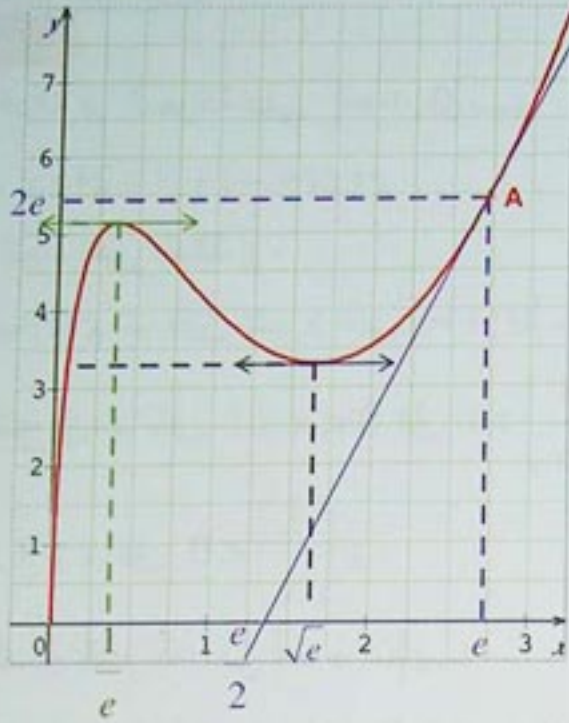
ب- احسب $g'(x)$. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ ، في الشكل

الموالي مرسوم تمثيلها البياني C في معلم متعامد

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ و مماسه عند النقطة A التي فاصلتها e يقطع

محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\frac{e}{2}$.



نقبل أن $f(x) = 2x(a(\ln x)^2 + b \ln x + c)$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية

1. احسب $f'(x)$ بدلالة a ، b و c .

2. باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل، عين $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.

$f'(\sqrt{e})$ و $f'(e)$.

3. استنتج أن $f(x) = 2x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$.

4. عين نهاية f عند 0 (يمكن وضع $t = -\ln x$)

5. عين نهاية f عند $+\infty$.

6. بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ،

$$f'(x) = 2(\ln x + 1)(2 \ln x - 1)$$

7. ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات f .

III. 1. لتكن الدالة φ المعرفة على $[0, 1; 0, 3]$:-

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

1. أ- بين أنه من أجل كل $x \in [0, 1; 0, 3]$ ، $\varphi'(x) > 0$.

ب- بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا واحدا α

على المجال $[0, 1; 0, 3]$.

2. بين أنه من أجل $x > 0$ ، $f(x) > 0$.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $[0; +\infty[$:- $h = g \circ f$

أ- عين نهايات الدالة h عند 0 و عند $+\infty$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة h على $[0; +\infty[$.

ج- بين أن $h(\alpha) = (g \circ g)(\alpha)$

د- عين قيمة مقربة إلى 10^{-4} للعدد $h(\alpha)$

71 بكالوريا

1. لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = -1 + x + 2 \ln x$$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب- احسب $g(1)$ ثم عين إشارة على $]0; +\infty[$.

ج- استنتج أن: إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

و إذا كان $x > 1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

2. نعتبر الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - x^2 \ln x \quad \text{إذا كان } x > 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f في $\mathbb{R}$ متعامد

و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الأطوال $2cm$.

ب- احسب $f'(x)$ و تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي

$$f'(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{موجب تماما } x$$

ج- شكل جدول تغيرات f

د- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α حيث

$$\frac{7}{4} < \alpha < 2$$

3. أ- تحقق أن المماس Δ للمنحنى $\mathcal{C}$ عند النقطة O

$$y = x$$

ب- ادرس وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة لـ Δ .

ج- ارسم Δ و $\mathcal{C}$.

4. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 \in]0; 1[$

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها.

72 الجزء الأول: نعتبر الدالتين g و h المعرّفتين على

$$]0; +\infty[\quad \text{كما يلي:}$$

$$h(x) = x + (x-2) \ln x \quad \text{و} \quad g(x) = x - 1 - \ln x$$

1. أ- احسب $g'(x)$ من أجل x من المجال $]0; +\infty[$

ثم ادرس تغيرات g .

2. أ- استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0; +\infty[$

ب- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$,

$$h(x) = 1 + g(x) + (x-1) \ln x$$

3. بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$,

$$(x-1) \ln x \geq 0$$

4. استنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$$

و ليكن $\mathcal{C}_f$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد

و متجانس.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. ليكن Δ المماس للمنحنى $\mathcal{C}_f$ في النقطة $A(1;1)$

أ- عين معادلة ديكرتية للمستقيم Δ .

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$$

ج- ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضعية النسبية

للمنحنى $\mathcal{C}_f$ و المستقيم Δ .

4. أنشئ Δ و $\mathcal{C}_f$. (نقبل أن $\mathcal{C}_f$ يقبل نقطة انعطاف فاصلتها

محصورة بين 1 و 1,5).

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = \sqrt{e}$ و من

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل طبيعي n , $0 < u_n < 1$.

2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

و ليكن $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد .

الجزء الأول: دراسة دالة مساعدة

1. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = xe^x + 1$

ادرس تغيرات h و بين أن $h(x) > 0$ من أجل x من $\mathbb{R}$.

2. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = x + 2 - e^x$$

أ- عين نهايات الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

ج- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$. نرمز بـ

α و β إلى هذين الحلين حيث $\alpha > \beta$.

بين أن $1,14 < \alpha < 1,15$.

د- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: دراسة تغيرات الدالة f و رسم المنحني $\mathcal{C}$:

1. عين نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

ب- باستعمال حصر α عين حصرًا للعدد سعته 10^{-2} .

4. عين معادلة للمماس (T) للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

5. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$$

$$u(x) = e^x - xe^x - 1$$

ب- ادرس تغير الدالة u و استنتج إشارة $u(x)$.

ج- استنتج وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس (T) .

6. ارسم $\mathcal{C}$ و (T) . تؤخذ وحدة الطول $2cm$ على محور

الفواصل و $5cm$ على محور الترتيب. نقبل أن

$$-1,84 < \beta < -1,85 \quad \text{و} \quad -1,18 < f(\beta) < -1,19.$$

الجزء الأول: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{إذا كان } x > 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

و ليكن $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد

و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الأطوال $5cm$

1. بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 1$ مقارب للمنحني $\mathcal{C}$.

2. أ- من أجل $x > 0$ احسب $\frac{f(x) - f(0)}{x}$

ب- ادرس نهاية هذه العبارة لما x يؤول إلى 0.

ج- ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟ بالنسبة للمنحني $\mathcal{C}$ ؟

3. بين أنه من أجل $x > 0$ $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$

4. ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول التغيرات.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = f(x) - xf'(x)$$

1. بين أنه المعادلتين $g(x) = 0$ و $x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

متكافئتان على المجال $[0; +\infty[$.

2. بين أن المعادلة $x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$ تقبل حلاً واحداً

α ثم باستعمال الحاسبة عين حصرًا لـ α سعته 10^{-2} .

3. نضع $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. أعط حصرًا لـ A سعته 2×10^{-1}

و بين أن $A = f'(\alpha)$

4. من أجل كل $a > 0$ نرمز بـ (T_a) إلى مماس

المنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها a .

بين أن معادلة (T_a) هي $y = Ax$

ارسم المماس (T_a) ثم المنحني $\mathcal{C}$.

5. استنتج من الأسئلة السابقة أن لكل المماسات (T_a)

للمنحني $\mathcal{C}$ (عند نقط فواصلها غير معدومة)، فقط المماس

(T_a) يمر بالمبدأ O .

6. نقبل أن المماس (T_a) أعلى المنحني $\mathcal{C}$ في المجال

$[0; +\infty[$.

أ- بقراءة بيانية، و بدون تبرير عين عدد حلول المعادلة

$f(x) = m$ حسب قيم العدد الحقيقي المعطى m .

ب- عين بيانياً عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$ حسب قيم

العدد الحقيقي المعطى m .

اختيار من متعدد

75 لكل سؤال عدة اقتراحات يمكن أن تكون صحيحة،

عينها مع تعليل الجواب

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x2^{-x}$ ،

و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1. (أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. من أجل كل عدد حقيقي x :

(أ) $f'(x) = (1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$

(ب) $f'(x) = (1 - x)2^{-x}$

(ج) $f'(x) = (1 - x \ln 2)2^{-x}$

3. (أ) من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) \leq \frac{3}{4}$

(ب) المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبلين حلين فقط.

(ج) المماس T للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها 0 فوق المنحني $\mathcal{C}$.

4. g هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln f(x)$

(أ) من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $g(x) < 0$

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

(ج) الدالة g متناقصة على المجال $]0; \frac{1}{\ln 2}[$

(د) المعادلة $g(x) = -0,5$ تقبل حلين في المجال $]0; +\infty[$

76 لكل سؤال عين الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة المقترحة.

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 \frac{\ln x}{x}$$

1. إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $x^2 + 2 - 2 \ln x$

2. على $]0; +\infty[$ إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(x-1)$.

3. على $]0; +\infty[$ g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3.

4. f متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

5. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[1; 2]$

6. منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$.

أصحح أم خطأ؟

77 اذكر إن كانت النهايات التالية صحيحة أو خاطئة مع

تبرير جوابك

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x+3)e^{-x}$

1. من أجل كل $x > 0$ ، $f(x) \geq -x+3$.

2. محور الفواصل مقارب لمنحني الدالة f .

3. مشتقة الدالة f هي $f'(x) = (2-x)e^{-x}$

4. الدالة g تقبل قيمة حدية واحدة.

5. من أجل كل $m \neq e^2$ ، المعادلة $f(x) = m$ إما لا تقبل

حلا أو تقبل حلين.

6. الدالة f حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = 7e^{-x}$

78 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$

اذكر إن الخواص التالية صحيحة أم خاطئة و علل اختيارك

1. من كل عدد حقيقي x : $f(x)f(-x) \leq 0$

2. من كل عدد حقيقي x : $f'(x) + f(x) = e^{-x}$

3. من كل عدد حقيقي x : $f(x) \leq 1$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

6. المنصف الأول هو المماس لمنحني الدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0.

79 لكل خاصية من الخواص التالية، اذكر إن كانت

صحيحة أم خاطئة معللا إجابتك.

1. من أجل كل عدد حقيقي x ، $\ln(2^x) = x$

2. يوجد عدد حقيقي a موجب حيث من أجل كل عدد

$$\ln(a^x) = x$$

3. من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و x ،

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = x$$

4. يوجد عدد حقيقي x حيث $2^{x-1} = 3$

5. من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $\sqrt[100]{x} \leq x$

6. يوجد عدد حقيقي موجب x حيث $(\sqrt[3]{x})^3 \neq x$

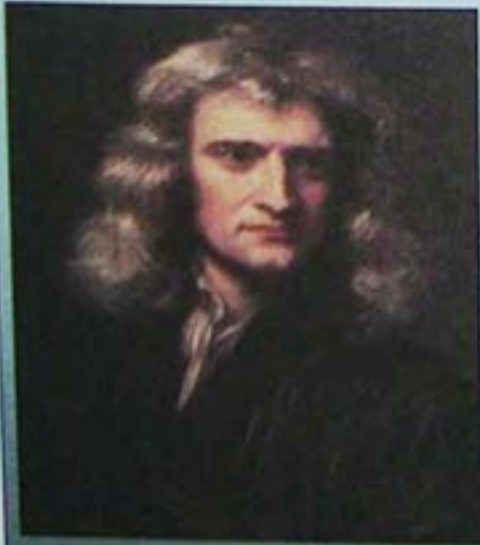
7. من أجل كل عددين حقيقيين x و y ،

$$2^{x+y} = \sqrt{2^{2x} \times 2^{2y}}$$

الكفاءات المستهدفة

- ◆ تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال.
- ◆ تعيين الدوال الأصلية لدوال مألوفة.
- ◆ تعيين الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة معطاة للمتغير.
- ◆ حل معادلات تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ و $y'' = f(x)$.

يعتبر الانجليزي إسحاق نيوتن و الألماني قوتفريد ولالم ليبنز مكتشفي الحساب التفاضلي و التكاملي. توصل نيوتن إلى مفهومي المشتقة و الدالة الأصلية (العملية العكسية لحساب المشتقة) عن طريق علم الحركة. فهو يعتبر المشتقة " سرعة " و دالة أصلية " مسافة ". بالعكس من ذلك فقد توصل ليبنز إلى اكتشافاته بواسطة الهندسة و اختيار ترميزا مناسباً.



إسحاق نيوتن
1642 م – 1727 م



ولالم ليبنز
1646 م – 1716 م

إن هذا الاكتشاف المزدوج خلق بين الرجلين
و بين مدرستيها صراعا حول الأولوية.

نشاط أول

(1) نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3; +\infty[$ كما يلي:

$$F(x) = \frac{2x-3}{x+3} - x \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$$

- تحقق أنه من أجل كل x من $]-3; +\infty[$ ، $F'(x) = f(x)$.
 - اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل x من $]-3; +\infty[$ ، $G'(x) = f(x)$.
- نقول أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على $]-3; +\infty[$.

تعريف: f و F دالتان معرفتان على مجال I و F قابلة للاشتقاق على I .

إذا كان من أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$ نقول أن:

- f هي الدالة المشتقة للدالة F .
- F دالة أصلية للدالة f على I .

(2) نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

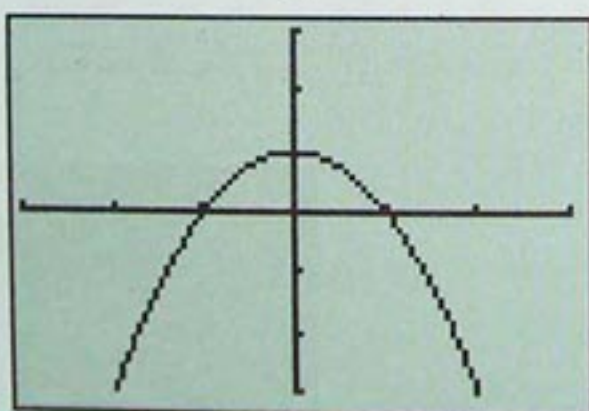
$$H(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \text{و} \quad h(x) = 2x - 3$$

- بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.
- عين دالة أصلية أخرى للدالة h على $\mathbb{R}$.

(3) عين دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية على المجال المعطى I :

$$I =]0; +\infty[\text{ و } f_3(x) = -\frac{1}{x^2} \quad I = \mathbb{R} \text{ و } f_2(x) = x^2 \quad I = \mathbb{R} \text{ و } f_1(x) = x$$

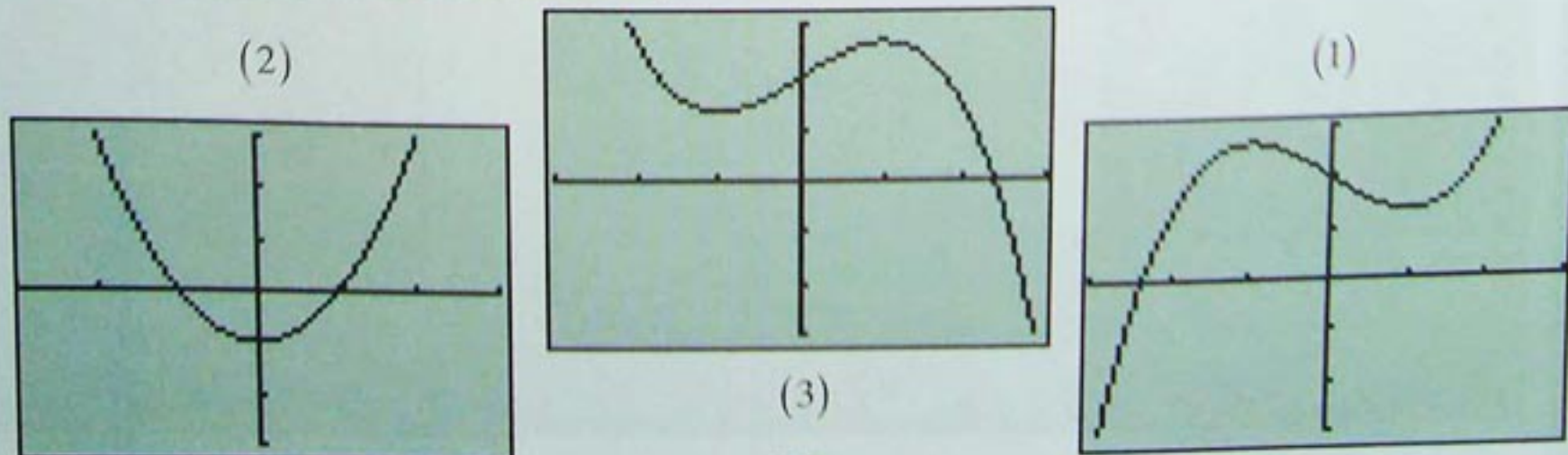
$$I =]0; +\infty[\text{ و } g_3(x) = \frac{2}{x^2} \quad I = \mathbb{R} \text{ و } g_2(x) = x^2 + 2x - 1 \quad I = \mathbb{R} \text{ و } g_1(x) = 3x$$



(4) رسمنا في الشكل المقابل على شاشة حاسبة بيانية

التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

من بين التمثيلات البيانية التالية يوجد التمثيل البياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. عينه مع التبرير.



نشاط ثان

تسير سيارة على طريق سيار مستقيم بسرعة 90 km h^{-1} .
بالحفاظ على تسارع ثابت لمدة 5 s (5 ثوان) و صلت سرعتها إلى 135 km h^{-1} .
نريد حساب المسافة المقطوعة d خلال هذه الثواني الخمس.
من أجل ذلك نختار مبدأ الأزمنة بالثانية، اللحظة التي تبدأ فيها بالتسارع و نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة، بالمتر، المقطوعة بين اللحظتين 0 و t . نذكر أن:

• السرعة $v(t)$ ، المعبر عليها بـ m.s^{-1} ، عند اللحظة t هي: $v = \frac{dx}{dt}$.

• التسارع الثابت، المعبر عليه بـ m.s^{-2} ، هو: $a = \frac{dv}{dt}$.

1. أحسب a .

2. عين دالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;5]$ بحيث: $\frac{df}{dt} = a$.

3. استنتج أن: $v(t) = 2,5t + 25$ على المجال $[0;5]$.

4. عين بدلالة t عبارة $x(t)$ ثم أحسب المسافة المقطوعة d .

نشاط ثالث

لتكن f دالة معرفة على مجال I .

1. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I .

بين أن الدالة: $G: x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي هي كذلك دالة أصلية للدالة f على المجال I .

2. لتكن F و G دالتين أصليتين للدالة f على المجال I . بين أن الدالة $F - G$ دالة ثابتة على المجال I .

3. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I و ليكن x_0 عددا حقيقيا من المجال I .

بين أنه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على المجال I بحيث $G(x_0) = y_0$ علما أن y_0 عدد حقيقي ثابت.

4. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I و ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال I .

بين أن العدد $F(b) - F(a)$ لا يتغير إذا استبدلنا الدالة الأصلية F بدالة أصلية أخرى G للدالة f على I .

١. الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I .

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f .
من أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$.

مثال: * الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = x^2 - 3x + 1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x - 3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$.
* الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $G(x) = x^2 - 3x - \sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x) = 2x - 3 = f(x)$.

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

خواص (دون برهان):

- * إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I .
- * إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال: $x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

3. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

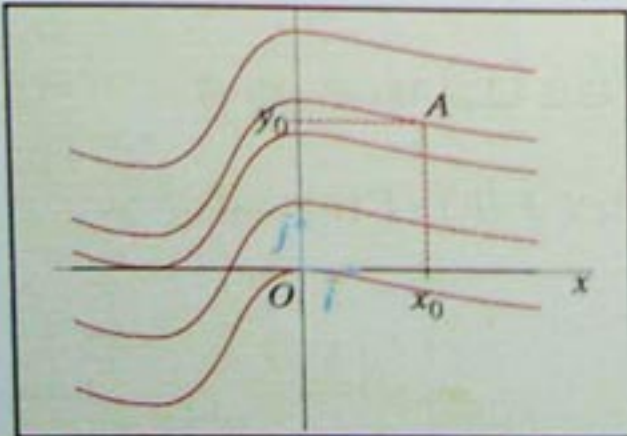
خاصية: f دالة مستمرة على مجال I . x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$.

البرهان: بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I و لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية. إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I ، $F(x) = G(x) + k$ حيث k عدد حقيقي. الشرط $F(x_0) = y_0$ يعني أن $G(x_0) + k = y_0$ أي أن $k = y_0 - G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k . توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$ ولدينا:

$$F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$$

التفسير البياني:



التمثيلات البيانية في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ للدوال الأصلية للدالة f

تستنتج من أحدها بواسطة انسحابات شعاعها $\vec{j}$ حيث k عدد حقيقي. واحد فقط من بين هذه التمثيلات البيانية يمر من النقطة $A(x_0; y_0)$.

تمرين محلول 1: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$F(x) = \frac{x-1}{x+1} - 2x \quad \text{و} \quad f(x) = -\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

طريقة: لإثبات أن F دالة أصلية لـ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل

$$F'(x) = f(x), \quad x \text{ من } I.$$

حل: F دالة ناطقة معرفة على $]-1; +\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ و من أجل كل x

$$F'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} - 2 = \frac{2}{(x+1)^2} - 2 \quad \text{من }]-1; +\infty[\text{ لدينا:}$$

$$F'(x) = \frac{2 - 2(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{2[1 - (x+1)^2]}{(x+1)^2} = \frac{2[(1-x-1)(1+x+1)]}{(x+1)^2} = \frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2} \quad \text{و منه:}$$

$$F'(x) = \frac{-2x^2 - 4x}{(x+1)^2} = -\frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = f(x) \quad \text{و بالتالي:}$$

و هكذا من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $F'(x) = f(x)$. إذن F دالة أصلية لـ f على المجال $]-1; +\infty[$.

تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + \cos x$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(\pi) = -1$.

حل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto x^2 + \sin x + k$ حيث k عدد حقيقي.

2. لدينا من جهة $F(x) = x^2 + \sin x + k$ و لدينا من جهة ثانية $F(\pi) = -1$.

$F(\pi) = -1$ يعني $\pi^2 - 0 + k = -1$ و منه $k = -1 - \pi^2$. نجد هكذا أن $F(x) = x^2 + \sin x - 1 - \pi^2$.

تمرين محلول 3: نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2; +\infty[$ كما يلي:

$$G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x \quad \text{و} \quad F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-2}$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

حل: الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $]2; +\infty[$ ، $F'(x) = G'(x)$.

$$G'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} \quad \text{و} \quad F'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}, \quad x \text{ من }]2; +\infty[$$

إذن من أجل كل x من $]2; +\infty[$ ، $F'(x) = G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $]2; +\infty[$ ، $F(x) - G(x) = k$ حيث k عدد حقيقي.

$$F(x) - G(x) = \left(\frac{x^2-2x+3}{x-2} \right) - \left(\frac{2x-1}{x-2} + x \right) = \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2, \quad x \text{ من }]2; +\infty[$$

لـ حساب الدوال الأصلية

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.
الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F . يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x) =$	$F(x) =$	$I =$
a (a عدد حقيقي)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$(k \in \mathbb{Z}) \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

2. خواص

- * إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لـ f و g على مجال I فإن $F + G$ دالة أصلية لـ $f + g$ على I .
- * إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I ($k \in \mathbb{R}$).

3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	من أجل كل x من I , $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من أجل كل x من I , $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من أجل كل x من I , $u(x) > 0$

تمرين محلول 1: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$I =]0; +\infty[\text{ و } h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad * \quad I =]-\infty; 0[\text{ و } g(x) = \frac{2}{x^2} \quad * \quad I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = x^3 - 3x + 5$$

حل: * دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ :

$$F(x) = \frac{1}{3+1}x^{3+1} - 3 \times \frac{1}{2}x^2 + 5x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5x$$

* دالة أصلية G للدالة g على $I =]-\infty; 0[$ معرفة بـ :

$$G(x) = 2 \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{2}{x}$$

* دالة أصلية H للدالة h على $I =]0; +\infty[$ معرفة بـ :

$$H(x) = 3 \left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}} \right) - 2\sqrt{x} = -\frac{3}{2x^2} - 2\sqrt{x}$$

تمرين محلول 2: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$I = \mathbb{R} \text{ و } g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} \quad * \quad I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$$

طريقة: لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u''$ أو $\frac{u'}{u''}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f = k \times u'u''$ أو $f = k \times \frac{u'}{u''}$ أو $f = k \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

حل:

• يظهر و أن الدالة f من الشكل $u'u''$ مع $u(x) = x^2 + 2x + 5$

لدينا $u'(x) = 2x + 2$ أي أن $u'(x) = 2(x+1)$ و منه $x+1 = \frac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x) = \frac{1}{2}u'(x) \times [u(x)]^2$ أي أن $f = \frac{1}{2} \times u'u^2$

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}[u(x)]^3$ أي $F(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 2x + 5)^3$

• يظهر و أن الدالة g من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x) = x^2 + 1$

لدينا $u'(x) = 2x$ أي أن $u'(x) = 2x$ و منه $3x = \frac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x) = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي أن $g = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $G(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = 3\sqrt{u(x)}$

أي $G(x) = 3\sqrt{x^2+1}$

١. المعادلات التفاضلية

1. تعريف

تعريف: معادلة تفاضلية هي معادلة:

1. المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز y ، z أو حرف آخر.
2. تظهر فيها بعض مشتقات y (المشتقة الأولى y' أو مشتقات من رتبة أكبر y'' ...).
3. نسمي حلا لمعادلة تفاضلية (E) في مجال I كل دالة φ تحقق (E) في I .

مثال: الدالة $y: x \mapsto 1 + \sin x$ هي حل في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية: $y' = \cos x$.

2. المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هي الدوال y حيث: $y = F(x) + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

البرهان: من الواضح أن الدوال y التي تحقق $y' = f(x)$ هي الدوال الأصلية للدالة f على I و منه إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن كل الدوال الأصلية لـ f على I هي الدوال $x \mapsto F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x^2}$ في $]0; +\infty[$ هي الدوال y حيث: $y = -\frac{1}{x} + c$ مع c ثابت حقيقي.

3. المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = f(x)$ هي الدوال y حيث: $y = G(x) + c_1 x + c_2$ مع c_1 و c_2 عددين حقيقيين ثابتين.

البرهان: نعلم أن $y'' = (y')'$ و منه $y'' = f(x)$ تعني $(y')' = f(x)$ أي $y' = F(x) + c_1$ حيث:

F دالة أصلية للدالة f على I و c_1 عدد حقيقي ثابت. لدينا من جهة ثانية:

$y' = F(x) + c_1$ تعني $y = G(x) + c_1 x + c_2$ حيث G دالة أصلية للدالة F على I و c_1 و c_2 عددين حقيقيين ثابتين.

(الدالة F قابلة للاشتقاق على I فهي إذن مستمرة على هذا المجال و بالتالي فهي تقبل دوال أصلية على I)

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \sin x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y = -\sin x + ax + b$ ، a و b ثابتان.

4. المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = -\omega^2 y$

مبرهنة (دون برهان): إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -\omega^2 y$ هي الدوال y حيث: $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ مع c_1 و c_2 عددين حقيقيين ثابتين.

ملاحظة: يمكننا أن نتأكد من أن الدوال y حيث: $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ مع c_1 و c_2 عددين حقيقيين

ثابتان، حلول للمعادلة التفاضلية $y'' = -\omega^2 y$ و ذلك باشتقاق الدالة y مرتين.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -2y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y = c_1 \cos(x\sqrt{2}) + c_2 \sin(x\sqrt{2})$ مع

c_1 و c_2 عددين حقيقيين ثابتين.

تمرين محلول 1:

1. حل المعادلة التفاضلية $(E) \quad y' = 3x^2 - 2x + 5$.
2. عين F حل المعادلة التفاضلية (E) بحيث: $F(1) = -2$.

حل:

1. دالة أصلية للدالة $x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ هي الدالة $x \mapsto x^3 - x^2 + 5x$ و بالتالي فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال y حيث: $y = x^3 - x^2 + 5x + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.
2. لدينا $F(x) = x^3 - x^2 + 5x + c$ و $F(1) = -2$ و منه $1^3 - 1^2 + 5 \times 1 + c = -2$ أي $c = -7$.
- إن الحل F الذي يحقق الشرط $F(1) = -2$ هي الدالة F حيث: $F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$.

تمرين محلول 2: حل المعادلة التفاضلية $(E) \quad y'' = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

حل:

- دالة أصلية للدالة $x \mapsto 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ هي الدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ و دالة أصلية للدالة $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ هي الدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- هي الدوال y حيث: $y = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c_1 x + c_2$ مع c_1 و c_2 عددين حقيقيين ثابتين.

تمرين محلول 3: نعتبر المعادلة التفاضلية $(E) \quad y'' + \pi^2 y = 0$.

1. حل المعادلة التفاضلية (E) .
2. عين الحل F الذي يحقق الشرطين: $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

حل:

1. نلاحظ أولاً أن $y'' + \pi^2 y = 0$ تعني $y'' = -\pi^2 y$ و منه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -\pi^2 y$ هي الدوال y حيث: $y = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x$ مع c_1 و c_2 عددين حقيقيين ثابتين.
2. لدينا: $F(x) = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x$ و $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.
- لدينا: $F'(x) = -\pi c_1 \sin \pi x + \pi c_2 \cos \pi x$ و بالتالي:

$$\begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} \\ -\pi c_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi c_2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \\ -\pi c_1 \sin \frac{2\pi}{3} + \pi c_2 \cos \frac{2\pi}{3} = 0 \end{cases} \text{ يعنى } \begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \\ F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

إنه $c_2 = \frac{2}{3}$ و منه $c_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ نجد هكذا: $F(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \cos \pi x + \frac{2}{3} \sin \pi x$

دراسة دالة أصلية

أ- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ماذا تستنتج؟

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. عين معادلة (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4. أرسم (Δ) و (C_f) .

ب- لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[0; +\infty[$ بحيث $F(0) = 0$. تعيين عبارة $F(x)$ غير

مطلوب.

1. فسر وجود الدالة F على المجال $[0; +\infty[$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة F على المجال $[0; +\infty[$.

3. نعتبر الدالتين H و K المعرفتين على المجال $[0; +\infty[$ بـ:

$$K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x \quad \text{و} \quad H(x) = F(x) - x$$

• أدرس اتجاه تغير الدالتين H و K على المجال $[0; +\infty[$.

• استنتج أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$. استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.

4. بين أن المعادلة $F(x) = \pi$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α ثم بين أن $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

تعيين دوال أصلية لدالة

أ- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج؟

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. استنتج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

3. أرسم في معلم المنحني (C) الممثل للدالة f .

ب- لتكن F ، G و H الدوال الأصلية للدالة f على الترتيب على المجالات $]-\infty; -1[$ ، $]-1; 1[$ و $]1; +\infty[$.

4. ما هو اتجاه تغير كل من F ، G و H على مجموعة تعريف كل منها؟

5. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ ، $f(x) = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}$.

6. استنتج عبارة كل من F ، G و H على مجموعة تعريف كل منها.

7. شكل جدول تغيرات كل من F ، G و H مع تحديد النهايات.

8. أرسم في نفس المعلم التمثيلات البيانية للدوال F ، G و H .

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $f: x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I ، $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I .

تطبيق 1: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I :

1. $I =]0; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
2. $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = e^{ax+b}$
3. $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$
4. $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \cos(2x)e^{\sin(2x)}$

تطبيق 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 4xe^{2x}$

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ $F(x) = (ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto u'(x)/u(x)$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماماً على مجال I فإن:

- الدالة $f: x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I ، $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I .

تطبيق 1: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I :

1. $I =]-2; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{x+2}$
2. $I =]1; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
3. $I =]0; \pi[$ ، $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
4. $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{-2e^x}{e^x+1}$

تطبيق 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $] -2; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x+3}{(x+2)^2}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $] -2; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $] -2; +\infty[$.

تطبيق 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x-1}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x-1}$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$.

تمرين : (بكالوريا)

I. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

1. بين أن f زوجية ثم ادرس تغيراتها.

2. بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = 1 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}$$

3. عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

II. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ :

$$g(x) = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

C. تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1. بين أن g فردية ثم ادرس تغيراتها .

2. بين أن المنحني C يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له .

3. ارسم المنحني C .

4. احسب مشتقة الدالة h المعرفة من أجل كل

$x \neq -a$ حيث $h(x) = (x+a) \ln |x+a| - x$ عدد حقيقي .

5. استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]2; +\infty[$

تعاليق

• بما أن f دالة زوجية ، نقتصر دراستها على $[0; 2[\cup]2; +\infty[$

• لا تنس التنبيه إلى أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من مجالات تعريفها.

• تحقق أن عناصر D متناظرة بالنسبة إلى الصفر و أن $g(-x) = -g(x)$ ، اقتصر دراسة g على $[0; 2[\cup]2; +\infty[$

• لاحظ أن إشارة $f(x)$ هي إشارة $x^2 - 4$

• طبق خواص الدوال الأصلية

• يمكن ملاحظة أنه إذا كان $x > 2$ فإن $|x-2| = x-2$ و $|x+2| = x+2$

حل مختصر

I. 1. من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ ، $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x) \text{ و منه } f \text{ دالة زوجية}$$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} : \mathbb{R} - \{-2; 2\} \text{ من أجل كل } x$$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[0; 2[$ و $]2; +\infty[$ و متزايدة على المجالين $]-\infty; -2[$ و $] -2; 0[$

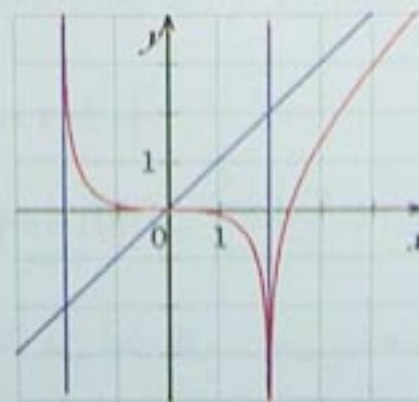
$$2. f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

3. مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي :

$$F(x) = x + \ln |x-2| - \ln |x+2| = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + k \text{ ، } k \text{ ثابت حقيقي}$$

II 1. $g'(x) = f(x)$ ، إذن $g'(x)$ تنعدم عند 0 ، تكون موجبة على $]-\infty; -2[$ و $]2; +\infty[$ و سالبة على $] -2; 0[$ و $]0; 2[$.

$$2. \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$$



إذن المنحني C يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

$$4. h'(x) = \ln |x+a|$$

$$g(x) = x + \ln |x-2| - \ln |x+2|$$

فتكون دالة أصلية للدالة g على $]2; +\infty[$ هي :

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-2) \ln |x-2| - (x+2) \ln |x+2|$$

تنبيه

في الجزء I من التمرين نريد دراسة تغيرات الدالة الأصلية لدالة معطاة دون معرفة عبارتها الجبرية بالنسبة لنهايات هذه الدالة الأصلية عند $-\infty$ و عند $+\infty$ نتقصدنا المعلومات لحسابها .

في الجزء II من التمرين، نعين دالة أصلية G للدالة g دون أن تكون g مكتوبة على أحد الأشكال المعروفة $\frac{u'}{u^n}$ ، $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ، ... و لكن الشكل العام لهذه الدالة الأصلية معلوم.

تمرين: الجزءان I و II مستقلان

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$.

2. نفرض أن $F(0) = 0$

عين معادلة للمماس (T) للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة O التي فاصلتها 0 .

3. ادرس اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$.

4. ادرس إشارة F على $\mathbb{R}$.

5. احسب F'' المشتقة الثانية للدالة F على $\mathbb{R}$.

6. ادرس إشارة F'' واستنتج وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس (T) .

II . لتكن الدالة G المعرفة كما يلي $G(x) = (ax + b) \ln x$

1. عين العددين الحقيقيين a و b لكي تكون الدالة G أصلية على المجال $]0; +\infty[$ للدالة g المعرفة بـ :

$$g(x) = \frac{2x - 3 + 2x \ln x}{x}$$

2. استنتج دالة أصلية للدالة g تنعدم من أجل e .

توجيهات

I. 1. الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2. معادلة المماس هي : $y = F'(0)(x - 0) + F(0)$ لا حظ أن $F'(x) = f(x)$

3. اتجاه تغير الدالة F يتوقف على معرفة إشارة $F'(x)$.

4. الدالة F متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ و $F(0) = 0$ (شكل جدول تغيرات الدالة F لتلاحظ إشارة F).

5. $F''(x) = f'(x)$ و مشتقة الدالة $\sqrt{u}$ هي $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

II. 1. ضع $G'(x) = g(x)$ فتجد $a = 2$ و $b = -3$

2. مجموعة الدوال الأصلية H للدالة g هي الدوال من الشكل $H(x) = G(x) + k$

و بوضع الشرط $H(0) = e$ نجد الدالة الأصلية المطلوبة.

1 في كل حالة من الحالات التالية بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D

1. $f: x \mapsto \frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}$ ، $F: x \mapsto \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$

$D = \mathbb{R}$

2. $f: x \mapsto \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$ ، $F: x \mapsto \frac{x + 1}{x^2 + 3}$

$D = \mathbb{R}$

3. $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$ ، $F: x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

$D =]-\infty; 2[$

4.

$f: x \mapsto \frac{-4x^2 + 10x + 11}{(x^2 + 3x - 1)^2}$ ، $F: x \mapsto \frac{-x^2 + x - 4}{x^2 + 3x - 1}$

$D =]1; +\infty[$

5. $f: x \mapsto \frac{3x + 1}{2x\sqrt{x}}$ ، $F: x \mapsto \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}$

$D =]0; +\infty[$

2 الدوال f ، g ، h ، k ، F ، G ، H و K معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$h(x) = -15x^2$ ، $g(x) = \frac{9}{x^4}$ ، $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$

، $F(x) = 4 - 5x^3$ ، $k(x) = -10x^4 + 2x - 1$

، $H(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ ، $G(x) = -2x^5 + x^2 - x + 3$

$K(x) = -\frac{3}{x^3} + 1$

• أرفق بكل دالة من الدوال f ، g ، h ، k دالة أصلية F ، G ، H أو K .

3 F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$F(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

$G(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} - 1 & ; x \in]-\infty; 0[\\ x^2 + \frac{1}{x} + 2 & ; x \in]0; +\infty[\end{cases}$ و

1. بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة على كل من

المجالين $]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$.

2. هل يوجد عدد حقيقي ثابت c حيث من أجل كل x

من $\mathbb{R}^*$ ، $G(x) = F(x) + c$ ؟

3. اشرح النتيجة المحصل عليها.

4 f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$f(x) = x + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^3}$

1. تحقق أن الدالة F المعرفة بـ:

$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2}$ أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$.

2. عين الدالة الأصلية G للدالة f و التي تنعدم من أجل $\frac{11}{8}$.

5 f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$f(x) = 3x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1}$

1. تحقق أن الدالة F المعرفة بـ:

$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2 + 1)$ أصلية للدالة f

على $]0; +\infty[$.

2. عين الدالة الأصلية G للدالة f و التي تنعدم من أجل 1.

• في التمارين من 6 إلى 10 تحقق أن الدالة F أصلية

للدالة f على المجال I ثم عين الدالة الأصلية على I التي

تنعدم من أجل x_0 .

6 $I = \mathbb{R}$ ، $F(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$

$x_0 = \sqrt{3}$ ، $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

7 $I = \mathbb{R}$ ، $F(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

$x_0 = \frac{\pi}{6}$ ، $f(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

8 $I =]1; +\infty[$ ، $F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2}$

$x_0 = 2$ ، $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

9 $I = \mathbb{R}$ ، $F(x) = e^{-x^2 + 1}$

$x_0 = 0$ ، $f(x) = -e^{-x^2 + 1}$

10 $I =]0; +\infty[$ ، $F(x) = x(\ln x - 1)$

$x_0 = 1$ ، $f(x) = \ln x$

• في التمارين من 11 إلى 16، اذكر إن كانت الدالتان F

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1 \quad (4)$$

$$f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x} \quad (5)$$

20 عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال I :

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = 5x^4 - 6x^3 - x + 3 \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = -\cos x + 3\sin x \quad (2)$$

$$I =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = x^2 - x + \frac{1}{x^2} \quad (3)$$

$$I =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3x^3} - 1 \quad (4)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = 3^x - 2^x \quad (5)$$

• في التمرينين **21** و **22** تعرف على الشكل $u'u''$ للدالة f ($n \in \mathbb{N}^*$) وعين مجموعة دوالها الأصلية على

المجال I

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = (x-1)^4 \quad (1) \quad \mathbf{21}$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{(x+2)^3}{5} \quad (2)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = 3(3x+4)^5 \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = e^x (e^x + 1)^2 \quad (4)$$

$$I =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^2 \quad (5)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x^2 (x^3 + 1)^4 \quad (1) \quad \mathbf{22}$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = 3 \cos x \sin^2 x \quad (2)$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad , \quad f(x) = \tan^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = -20x \left(8 - \frac{x^2}{2} \right)^3 \quad (4)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = e^{-2x} (e^{-2x} + 2)^3 \quad (5)$$

• في التمرينين **23** و **24** ، تعرف على الشكل $\frac{u'}{u^n}$

و عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f ($n \in \mathbb{N}, n > 2$) على المجال I .

$$I =]2; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{5}{(x-2)^7} \quad (1) \quad \mathbf{23}$$

$$I =]-1; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} \quad (2)$$

و G أصليتان لنفس الدالة f على المجال المعطى:

$$G(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1} \quad , \quad F(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} \quad \mathbf{11}$$

$$I =]-1; +\infty[$$

$$G(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad , \quad F(x) = \frac{3}{x-1} \quad \mathbf{12}$$

$$I =]1; +\infty[$$

$$G(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad F(x) = \tan^2 x \quad \mathbf{13}$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$G(x) = \frac{4x^2 - 5x + 10}{2x^2 - 3x + 5} \quad , \quad F(x) = \frac{x}{2x^2 - 3x + 5} \quad \mathbf{14}$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 3} \quad , \quad f(x) = \frac{2x^2 + 8x - 5}{(x^2 + x + 3)^2} \quad \mathbf{15}$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} \quad , \quad f(x) = \frac{2x-3}{2x\sqrt{x}} \quad \mathbf{16}$$

$$I =]0; +\infty[$$

17 F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$G(x) = \frac{-6x-2}{x^2+x+1} \quad \text{و} \quad F(x) = \frac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}$$

تحقق أن G و F أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}$
(أ) بحساب الفرق $F(x) - G(x)$ ، (ب) باستعمال المشتقة

2 - حساب الدوال الأصلية

18 جد الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ للدوال التالية:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{3} \quad (2)$$

$$f(x) = -3\sin x + 2\cos x + 1 \quad (3)$$

$$f(x) = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(\pi + x) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 + 2x - e^x \quad (5)$$

19 جد الدوال الأصلية للدالة f على $]0; +\infty[$ للدوال التالية:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4} \quad (2)$$

27 تعرف على الشكل $\frac{u'}{u}$ و عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

$$I =]1; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad (2)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; f(x) = \frac{6x+3}{x^2+x+1} \quad (4)$$

$$I =]0; \pi[\quad ; f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (5)$$

28 تعرف على الشكل $u'e''$ و عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

$$I = \mathbb{R} \quad ; f(x) = e^{4x+1} \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; f(x) = xe^{-x^2} \quad (2)$$

$$I =]0; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{3}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; f(x) = \sin x e^{\cos x} \quad (4)$$

$$I =]-1; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} \quad (5)$$

29 تعرف على الشكل المناسب للدالة f ثم عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

$$I = \mathbb{R} \quad ; f(x) = 2x^3(x^4+2)^3 \quad (1)$$

$$I =]-\infty; -1[\quad ; f(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} \quad (2)$$

$$I =]-1; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{x^3+1} \quad (3)$$

$$I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad ; f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \quad (4)$$

$$I =]1; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (5)$$

30 عين دالة أصلية على $\mathbb{R}$ لكل من الدوال التالية:

$$f(x) = \sin^2 x \quad .1$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad .2$$

$$f(x) = \sin x \cos x \quad .3$$

$$I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\quad , \quad f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3} \quad (3)$$

$$I =]1; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} \quad (4)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \quad (5)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; f(x) = \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} \quad (1) \quad \mathbf{24}$$

$$I =]-1; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4} \quad (2)$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad ; f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad (3)$$

$$I = [0; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2} \quad (4)$$

$$I = [1; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{1}{x(\ln x+2)^2} \quad (5)$$

• في التمرينين **25** و **26** ، تعرف على الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

و عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

$$I =]1; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (1) \quad \mathbf{25}$$

$$I =]2; +\infty[\quad ; f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} \quad (2)$$

$$I =]3; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}} \quad (3)$$

$$I =]-\infty; 2[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3 \quad (4)$$

$$I =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}} \quad (5)$$

$$I =]3; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x-3}} \quad (1) \quad \mathbf{26}$$

$$I =]0; \pi[\quad , \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \quad (2)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + 3}} \quad (3)$$

$$I =]0; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{2x^2+x}{\sqrt{x^4+x^2}} \quad (4)$$

$$I =]1; +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \quad (5)$$

• في التمارين من 31 إلى 34 ، حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية

31 (1) $y' = 2x^2 + x - 1$

(2) $y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$

(3) $y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

(4) $y' = 3 \sin(2x)$

32 (1) $y'' = 4x^3 - 3x^2 - 1$

(2) $y'' = \cos(2x + 3)$

(3) $y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2}$

(4) $y'' = \cos(2x) - 2 \sin x$

33 (1) $y'' + y = 0$

(2) $y'' + 9y = 0$

(3) $4y'' + \pi^2 y = 0$

34 حل المعادلة التفاضلية $4y'' + 121y = 0$ ، ثم عين

الحل F الذي يحقق الشرطين التاليين:

$F'(-\pi) = 2$ و $F(\pi) = 1$

35 1. حل المعادلة التفاضلية $9y'' + 4y = 0$.

2. عين الحل الخاص F لهذه المعادلة الذي يحقق ما يلي:

المنحنى الممثل للدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3}\right)$ و يقبل

في هذه النقطة مماسا معامل توجيهه $-\frac{2}{3}$.

3. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$F(x) = 2 \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

4. حل المعادلة $F(x) = 0$ ثم عَمِّ صور حلولها على الدائرة المثلثية.

تمارين للتعمق

36 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[$ كما يلي:

$f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد

حقيقي x من $]0;1[$: $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$

2. استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;1[$ تحقق:

$F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$

37 نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ :

$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{(x^2 - 1)^3}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$

2. استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$

3. استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

تحقق: $F(0) = 1$.

38 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد

حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

2. استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

• في التمارين من 39 إلى 41 $f(x)$ عين دالة أصلية للدالة f على المجال المعطى

39 $I =]1;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

اكتب $f(x)$ على الشكل $\left[f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2} \right]$

40 $I =]2;+3[$ ، $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 25}{x^2 + x + 6}$

اكتب $f(x)$ على الشكل $\left[f(x) = a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2} \right]$

41 $I =]-\infty;-1[$ ، $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$

اكتب $f(x)$ على الشكل $\left[f(x) = ax + b + \frac{3}{x+1} \right]$

42 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \cos^3 x$

1. تحقق أن $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

2. عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

43 $f(x) = \sin x + \sin^3 x$

1. تحقق أن $f(x) = 2 \sin x - \sin x \cos^2 x$

2. عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

44 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$

1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد

حقيقي x : $f(x) = \sin x (a \cos^2 x + b \cos^4 x)$

2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

45 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$

1. بملاحظة أن $f(x) = \cos x (\sin^4 x \cos^4 x)$

اكتب $f(x)$ على الشكل:

$f(x) = \cos x (a \sin^4 x + b \sin^6 x + c \sin^8 x)$

2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

46 نريد تعيين دالة أصلية للدالة $f: x \mapsto \sin^4 x$

على $\mathbb{R}$.

1. احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ حيث f' هي الدالة

مشتقة للدالة f و f'' هي الدالة المشتقة للدالة f' .

2. عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 2x$

3. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

47 عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f المعرفة

على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ: $f: x \mapsto \tan^{2004} x + \tan^{2008} x$

بكالوريا

48 u و v دالتان معرفتان على $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ كما يلي:

$v(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$ و $u(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من I :

$u'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

2. جد دالة أصلية للدالة v على I و التي تنعدم من أجل 0

49 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x \cos x$

1. بين أن $f(x) + f''(x) = -2 \sin x$

2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

50 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x \sin x$

1. تحقق أن الدالة f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل

$F(x) = ax \cos x + b \sin x$

2. عين الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من

أجل $x = \frac{\pi}{2}$.

51 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x^2 e^{2x}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث تكون الدالة F

المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ أصلية

للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. استنتج دالة أصلية للدالة f و التي تنعدم من أجل $x = 0$

52 إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق و موجبة تماماً على

مجال D و إذا كان $r \in \mathbb{Q}$ فإن الدالة g حيث $g = f^r$

قابلة للاشتقاق على D و $g' = r f^{r-1} f'$

تطبيق: عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال D

(أ) $f(x) = \sqrt{x}$; $D =]0; +\infty[$

(ب) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$; $D = \mathbb{R}$

(ج) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$; $D =]-1; +\infty[$

53 لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x

من $]0; +\infty[$: $f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$

2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$.

54 من بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $]2; +\infty[$ كما يلي:

$f(x) = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$

1. عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على $]2; +\infty[$ بـ:

$g: x \mapsto (x+a) \ln |x+a| - x$ حيث a حقيقي معطى

2. استنتج دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \ln |x+a|$

3. عين دالة أصلية للدالة f على $]2; +\infty[$.

55 من بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$f(x) = \frac{6e^x}{e^{2x} - 1}$

1. عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل

كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{\alpha e^x}{e^x - 1} + \frac{\beta e^x}{e^x + 1}$

2. استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على

المجال $]0; +\infty[$.

56 من بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

1. احسب الدالة المشتقة الثانية f'' للدالة f .

2. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$$

3. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

57 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x \cos x$$

1. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

2. جد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل

$$f(x) = af''(x) + bf'(x), \quad x \text{ عدد حقيقي}$$

3. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

58 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x^3 e^{2x}$$

جد دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث:

$$F(x) = P(x) e^{2x}$$

و P هو كثير حدود من الدرجة الثالثة.

59 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^{\lambda x} (\alpha \cos \theta x + \beta \sin \theta x)$$

حيث $\lambda, \alpha, \beta, \theta$ أعداد حقيقية ثابتة.

1. احسب $f'(x)$

2. نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = e^{-x} (\sin x - 5 \cos x)$$

باستعمال نتيجة السؤال الأول جد دالة أصلية G للدالة g

التي تحقق $G(0) = 3$.

مسائل

60 بكالوريا

f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة كما يلي:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3 \ln x}{2x^2}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

I. 1. أ- عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب- احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ج- احسب $f(\sqrt{e})$

د- عين المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) و تقاطعهما

مع المنحنى (C).

هـ- ارسم (C).

2. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) > 0$

3. ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي k و جود و عدد

حلول المعادلة ذات المجهول x :

$$4(k-1)x^2 - 3 + 6 \ln x = 0$$

II. لتكن الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$g(x) = x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x} \quad \text{على }]0; +\infty[\text{ كما يلي:}$$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. فسر لنتيجة بيانها.

2. احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

3. استنتج تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$.

4. عين معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) الممثل للدالة g

عند النقطة التي فاصلتها 1.

5. بين أن المنحنى (Γ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين

إحداثياتها.

6. احسب $g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1)$ ثم تحقق أن المعادلة

$$g(x) = 0 \quad \text{تقبل حلا محصورا بين } \frac{1}{2} \text{ و } 1.$$

7. أ- بين أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا D يطلب

تعيين معادلة له.

ب- ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة إلى المستقيم

D .

8. ارسم (T) ، D و (Γ) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

61 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

1. أ- احسب المشتقات المتتالية للدالة f إلى غاية الرتبة

4.

ب- جد علاقة بين الدالة f و مشتقتها ذات الرتبة 4

التي نرمز لها بالرمز $f^{(4)}$

استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_n = F[(2n+1)\pi] - F[2n\pi]$$

أ- احسب u_0

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2} (e^{-\pi} + 1)$$

ج- بين أن المتتالية (u_n) هندسية، حدد أساسها.

استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

اختيار من متعدد

62 لكل الأسئلة التالية ، إجابة واحدة صحيحة، ما هي ؟

1. f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$F(x) = \frac{1}{2x} - \frac{3}{x+1}$$

F هي دالة أصلية لدالة f على $]0; +\infty[$

دالة أصلية أخرى G للدالة f على $]0; +\infty[$ معرفة بـ:

$$G: x \mapsto \frac{6x^2 + x + 1}{2x(x+1)} \quad (\text{ب} \quad G: x \mapsto \frac{6x^2 + x + 1}{2x(x+1)} - x)$$

$$G: x \mapsto -\frac{1}{2x} + \frac{3}{x+1} \quad (\text{جـ})$$

2. f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

دالة أصلية F للدالة f على $]-1; +\infty[$ معرفة بـ:

$$F(x) = \frac{-x+1}{(x+1)^2} \quad (\text{ب} \quad F(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x+1)^2})$$

$$F(x) = \frac{x^3 - x + 1}{(x+1)^2} - 1 \quad (\text{جـ})$$

3. f دالة موجبة على مجال D و F دالتها الأصلية على

هذا المجال، إذن:

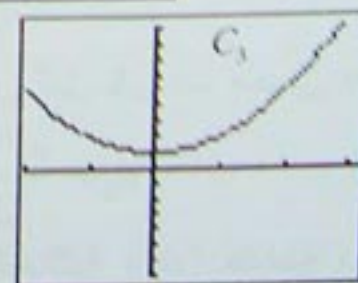
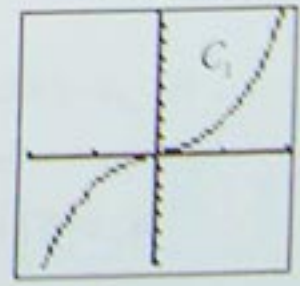
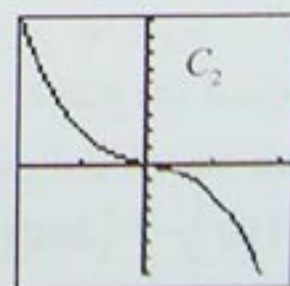
(أ) F متزايدة تماماً على D (ب) F متناقصة تماماً على D

(جـ) F ليست رتيبة تماماً على D .

4. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -1 - x^2$

أحد المنحنيات التالية C_1 و C_2 و C_3 هو منحنى بياني لدالة

أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$



المنحنى (C) هو:

(أ) C_1 (ب) C_2 (جـ) C_3

أصحح أم خطأ ؟

63 اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع

تبرير جوابك

1. دالة أصلية على المجال $]0; +\infty[$ للدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2}{2x^2} \quad \text{هي الدالة } F \text{ المعرفة بـ:}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{x}$$

2. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث إشارة $f(x)$ معطاة بـ:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

إذا كانت F دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f فإن $F(\alpha)$ قيمة

حدية صغرى لـ F على $\mathbb{R}$.

3. f دالة سالبة تماماً على $[1; 3]$. إذا كانت F دالة أصلية

على $[1; 3]$ فإن: $F(2,1) > F(2,2)$.

4. دالتان مختلفتان يمكن أن تكونا دالتين أصليتين لنفس

الدالة.

5. دالة يمكن أن تكون أصلية لدالتين مختلفتين.

6. الدالتان F و G المعرفتان على $]0; +\infty[$ بـ:

$$G(x) = 1 + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{و} \quad F(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

أصليتان لنفس الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

7. الدالة f التي دالتها المشتقة f' معرفة بـ:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad \text{تقبل دالة أصلية على } \mathbb{R}.$$

8. f دالة معرفة على $]2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2}$

الدالة f تقبل دالة أصلية F على $]0; +\infty[$ تحقق $F(2) = 0$.

9. f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x) = \sqrt{x}$

الدالة f تقبل دالة أصلية F متزايدة على $\mathbb{R}^+$.

10. F دالة أصلية لدالة f معرفة و مستمرة على مجال I

إذا كانت f موجبة على مجال $[a; b]$ فإن $F(a) > F(b)$

الكفاءات المستهدفة

- ◆ توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى.
- ◆ استعمال التكامل بالتجزئة.
- ◆ توظيف خواص التكامل لحساب دوال أصلية.
- ◆ حساب حجوم لمجسمات بسيطة.
- ◆ توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة.

ثابت بن قرة.. إقليدس العرب

ولد ثابت بن قرة (سنة 221 هـ = 834 م) في حران من أرض الجزيرة شمال العراق، بتركيا الآن. برع ثابت في علم الهندسة حتى قيل عنه إنه أعظم هندسي عربي على الإطلاق، وقال عنه "يورانت ول": إنه أعظم علماء الهندسة المسلمين؛ فقد ساهم بنصيب وافر في تقدم الهندسة، وهو الذي مهد لإيجاد علم التكامل والتفاضل، كما استطاع أن يحل المعادلات الجبرية بالطرق الهندسية، وتمكن من تطوير وتجديد نظرية فيثاغورث، وكانت له بحوث عظيمة وابتكارات رائدة في مجال الهندسة التحليلية؛ فقد ألف كتابا في الجبر، شرح فيه العلاقة بين الجبر والهندسة، وكيفية التوفيق بينهما، واستطاع أن يعطي حلولاً هندسية لبعض المعادلات التكعيبية، وهو ما أفاد علماء الغرب فيما بعد في تطبيقاتهم وأبحاثهم الرياضية في القرن السادس عشر.

و يجدر بنا أن نذكر أن ثابت بن قرة مهد لحساب التكامل وذلك عندما وجد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره و حين حل معادلة من الدرجة الثالثة بطريقة هندسية و ذلك في كتابه مدخل إلى كتاب إقليدس.

ومن مؤلفات ثابت الرياضية والهندسية:

- كتاب في الشكل الملقب بالقطوع.
- كتاب في مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة.
- كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها.
- مساحة المجسمات المكافئة.
- قول في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية.

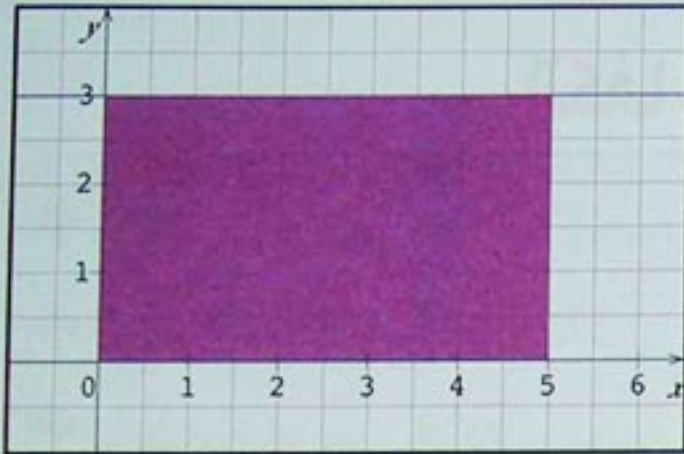


ثابت بن قرة

نشاط أول

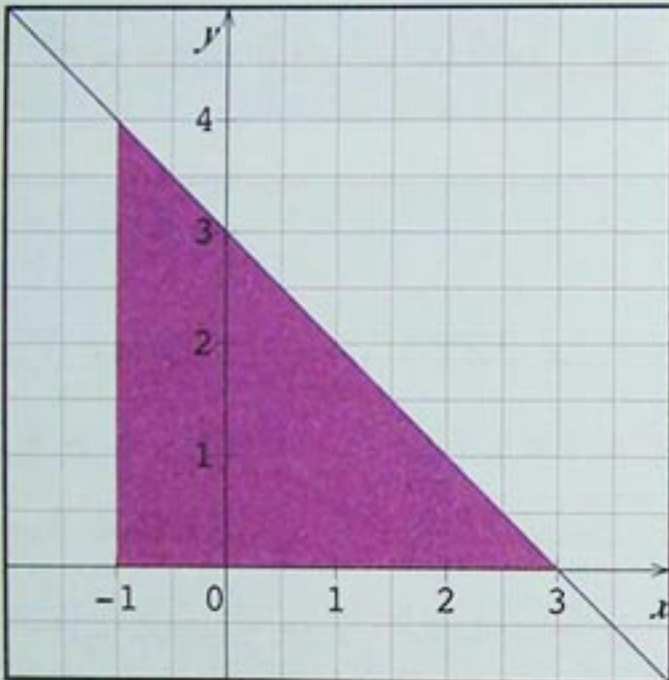
الجزء الأول

نزود المستوي في كل ما سيأتي بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $1cm$.



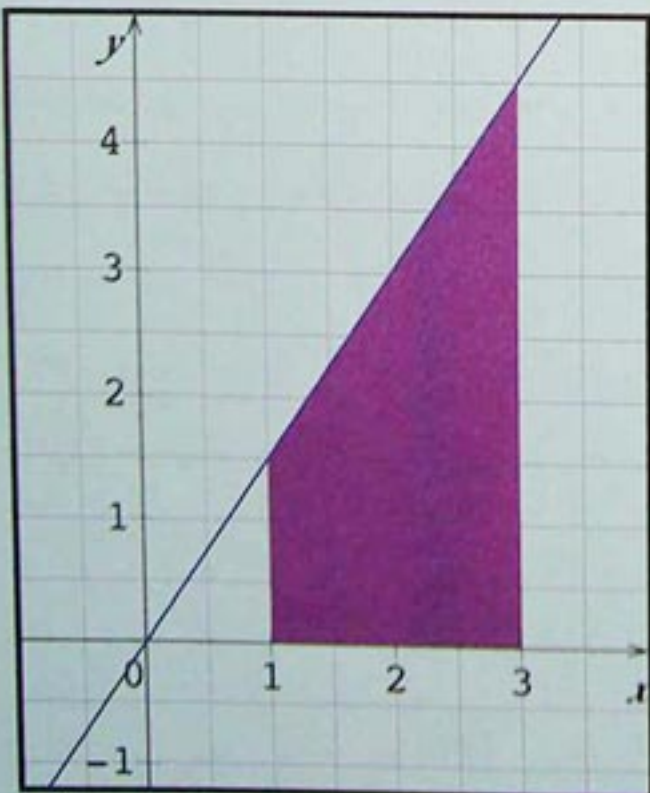
(1) نعتبر الدالة f_1 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_1(x) = 3$.
و ليكن (C_1) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
نرمز بـ A_1 إلى مساحة الحيز الملون تحت المنحني (C_1) بين
العددين 0 و 5.

- أحسب بـ cm^2 مساحة A_1 .
- عين دالة أصلية F_1 للدالة f_1 على $\mathbb{R}$.
- أحسب $F_1(5) - F_1(0)$.



(2) نعتبر الدالة f_2 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_2(x) = -x + 3$.
و ليكن (C_2) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
نرمز بـ A_2 إلى مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_2) ، محور الفواصل
و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 3$.

- أحسب بـ cm^2 مساحة A_2 .
- عين دالة أصلية F_2 للدالة f_2 على $\mathbb{R}$.
- أحسب $F_2(3) - F_2(-1)$.



(3) نعتبر الدالة f_3 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_3(x) = \frac{3}{2}x$.
و ليكن (C_3) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
نرمز بـ A_3 إلى مساحة الحيز مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي
حيث $1 \leq x \leq 3$ و $0 \leq y \leq f_3(x)$.

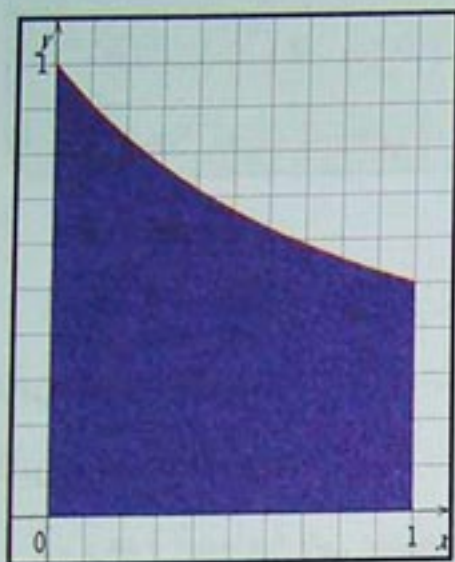
- أحسب بـ cm^2 مساحة A_3 .
- عين دالة أصلية F_3 للدالة f_3 على $\mathbb{R}$.
- أحسب $F_3(1) - F_3(3)$.

(4) ماذا تلاحظ في الحالات الثلاث ؟ ضع تخميناً.

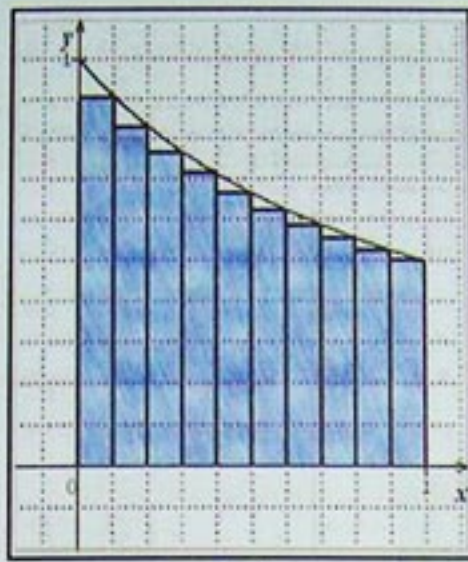
الجزء الثاني

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{1}{x+1}$ المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ

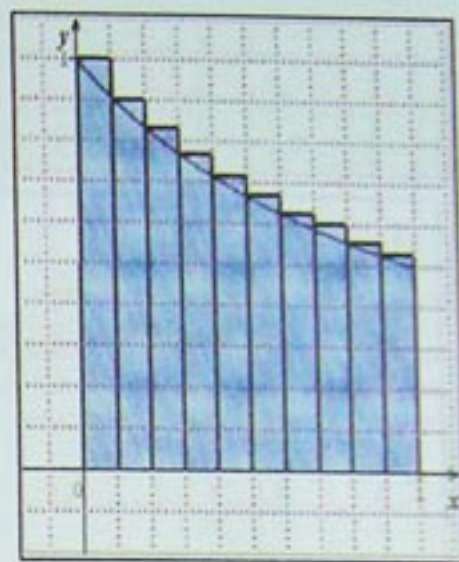
و ليكن (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



(1)



(2)



(3)

(1) هل يمكن، باستعمال قاعدة في الهندسة، حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل (1) ؟

(2) أحسب A' مساحة الحيز الملون في الشكل (2) و A'' مساحة الحيز الملون في الشكل (3).

يمكنك استعمال الجدول التالي:

x	0,1	0,2	0,3							
$f(x)$										
المساحة										

(3) استنتج حصرا للمساحة A .

(4) تحقق ما إن كانت النتيجة المحصل عليها متلائمة مع تخمينك الذي وضعته في السؤال 4 من الجزء الأول.

نشاط ثان

نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; 2]$ بـ $g(x) = -x + 2$ و ليكن (d) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. لتكن النقطة $A(-1; 3)$ و لتكن النقطة A' مسقطها العمودي على محور الفواصل.

نعتبر نقطة M من المنحني (d) فاصلتها x و نرمز بـ M' إلى مسقطها العمودي على محور الفواصل.

نرمز بـ $G(x)$ إلى مساحة شبه المنحرف $AA'MM'$.

1. أنجز شكلا مناسباً.

2. نفرض أن $-1 \leq x \leq 2$

• أحسب $G(x)$ بدلالة x ثم تحقق أن $G'(x) = g(x)$.

• أحسب $G(-1)$. ماذا تستنتج ؟

3. نفرض أن $x \leq -1$

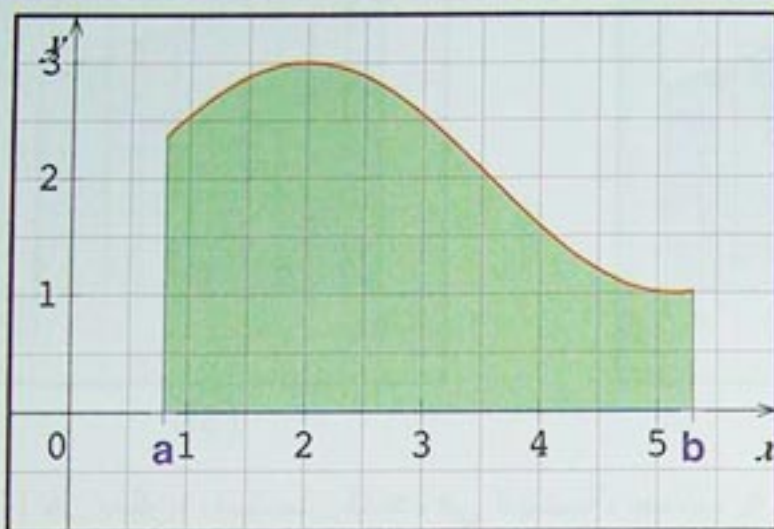
• أحسب $G(x)$ بدلالة x . ماذا تلاحظ ؟

• أحسب $G(-1)$. ماذا تستنتج ؟

لـ تكامل دالة

1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I . a و b عددين حقيقيين من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O; A, B)$ و F دالة أصلية لـ f على I .
مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$.



ملاحظات:

1. الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$.
2. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OAKB$ حيث K هي النقطة التي إحداثياتها $(1;1)$.

2. تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددين حقيقيين من I . إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل x من I ، $G(x) = F(x) + k$.
لدينا: $G(b) - G(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k] = F(b) - F(a)$.
نلاحظ هكذا أن العدد $F(b) - F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I .

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددين حقيقيين من I .
يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ ، حيث F دالة أصلية للدالة f على I ، التكامل من a إلى b لـ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x) dx$. نقرأ: "التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x ".

ملاحظة:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x) dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. يمكن استبدال المتغير x بأحد الحروف $t, q, \dots$ فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I . a و b عددين حقيقيين من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد و F دالة أصلية لـ f على I . مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمات التي معادلتهما $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x) dx$.

تمرين محلول 1: أحسب التكاملات التالية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx \quad (2)$$

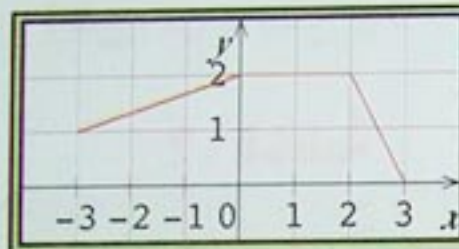
$$\int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx \quad (1)$$

حل:

$$1. \int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx = \left[-x^3 + x \right]_{-1}^2 = (-6) - (0) = -6$$

$$2. \int_0^1 e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \left[e^{2x-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[(e) - (e^{-1}) \right] = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$3. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{-\pi}^{\pi} = (1) - (1) = 0$$



تمرين محلول 2: التمثيل البياني المقابل هو لدالة f .

$$\int_0^3 f(x) dx \quad (3) \quad \int_{-3}^3 f(x) dx \quad (2) \quad \int_{-3}^2 f(x) dx \quad (1)$$

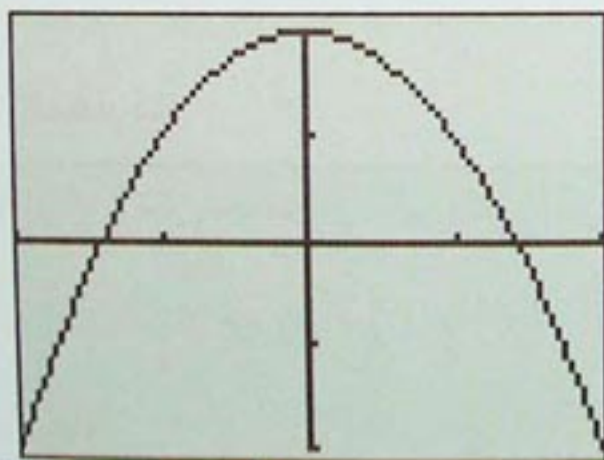
حل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $[-3; 3]$.

$$\int_0^3 f(x) dx = 2 \times 2 + \frac{1 \times 2}{2} = 5 \quad (3) \quad \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{17}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = \frac{19}{2} \quad (2) \quad \int_{-3}^2 f(x) dx = 3 \times \frac{1+2}{2} + 4 = \frac{17}{2} \quad (1)$$

تمرين محلول 3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - x^2$

- أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C) الممثل للدالة f .
- أحسب بوحدة المساحة (ua) مساحة الحيز المحدد بـ (C) و المستقيمت $x = -1$ ، $x = 1$ و $y = 0$.
- المعلم الذي مثلت فيه الدالة f متعامد حيث الوحدات كما يلي: $2cm$ على محور الفواصل و $1,5cm$ على محور الترتيب. أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1 .

حل:



WINDOW
Xmin=-2
Xmax=2
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=2
Yscl=1
Xres=1

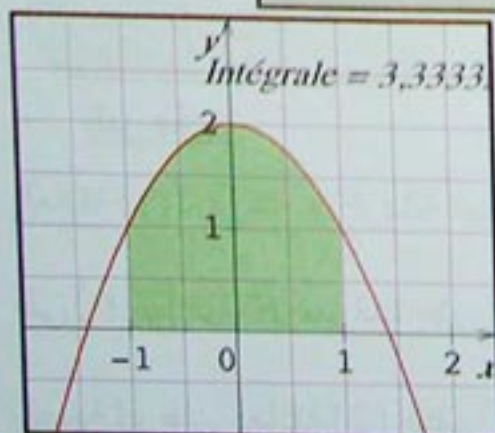
- أنظر الشكل المقابل.
- الدالة f موجبة على المجال $[-1; 1]$ و دالة أصلية لها على $[-1; 1]$ هي الدالة F حيث: $F(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3$

مساحة الحيز، بوحدة المساحة (ua) ، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \left(-2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{3} (ua)$$

3. وحدة المساحة هي $2cm \times 1,5cm$ أي $3cm^2$ و بالتالي فإن مساحة

الحيز، بـ cm^2 ، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي: $\frac{10}{3} \times 3cm^2$ أي $10cm^2$



لـ خواص التكامل

1. علاقة شال

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I . من أجل كل أعداد حقيقية a, b, c و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

البرهان: إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = [F(c) - F(a)] = \int_a^c f(x) dx$$

نتائج: من الواضح أن $\int_a^a f(x) dx = 0$ ومنه إذا أخذنا $c = a$ نحصل على $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

2. الخطئية

خاصية: f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (2) \quad \text{و} \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

البرهان: العلاقة (1): نعلم أنه إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب للدالتين f و g على المجال I فإن الدالة $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I . ومنه:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] \\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

العلاقة (2): نتبع منهجية مماثلة علما أنه إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن kF دالة أصلية لـ kf على I .

3. المقارنة

خواص: f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a; b]$.

$$(1) \quad \text{إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a; b], f(x) \geq 0 \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$(2) \quad \text{إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a; b], f(x) \leq g(x) \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

البرهان:

العلاقة (1): إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن من أجل كل x من I , $F'(x) = f(x)$ و بما أن $f(x) \geq 0$

على $[a; b]$ فإن F متزايدة على $[a; b]$ و بالتالي $F(a) \leq F(b)$ أي $F(b) - F(a) \geq 0$ و منه $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

بالنسبة لبرهان العلاقة (2) يكفي أن نلاحظ أن $g(x) - f(x) \geq 0$ و نطبق النتائج السابقة.

تمرين محلول 1: أحسب التكامل التالي: $\int_0^3 |x^2 - 1| dx$

طريقة: نكتب، حسب قيم x ، عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة لنتمكن من تعيين دوال أصلية للدالة f .

- حل:** $x^2 - 1$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه -1 ، 1 و بالتالي:
- من أجل كل x من $[0; 1]$ ، $x^2 - 1 \leq 0$ إذن $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$.
 - من أجل كل x من $[1; 3]$ ، $x^2 - 1 \geq 0$ إذن $|x^2 - 1| = x^2 - 1$.

باستعمال علاقة شال يكون لدينا: $\int_0^3 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^3 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx$

و منه $\int_0^3 |x^2 - 1| dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^3 = \left[\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - 0 \right] + \left[\left(\frac{27}{3} - 3 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] = \frac{22}{3}$

تمرين محلول 2: نعتبر التكاملين: $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ و $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

أحسب $A + B$ و $A - B$ ثم استنتج A و B .

حل:

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

لدينا $A + B = \frac{\pi}{4}$ و $A - B = \frac{1}{2}$. بعد حل هذه الجملة نجد $A = \frac{\pi + 2}{8}$ و $B = \frac{\pi - 2}{8}$.

تمرين محلول 3: نعتبر التكامل $I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$

1. بين أنه من أجل كل t من $[0; 1]$ ، $\frac{1}{t^2 + 1} \leq 1$.
2. استنتج حصرا للعدد I .

حل:

1. من أجل كل t من $[0; 1]$ ، $1 + t^2 \geq 1$ و منه من أجل كل t من $[0; 1]$ ، $\frac{1}{1 + t^2} \leq 1$.

2. بما أن $0 < 1$ و بتطبيق خاصية المحافظة على الترتيب نستنتج أن $\int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt$

و بما أن $\int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1$ فإن $\int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt \leq 1$. من الواضح كذلك أنه من أجل كل t من $[0; 1]$ ، $\frac{1}{1 + t^2} > 0$.

و منه $0 < I \leq 1$. نستنتج هكذا الحصر التالي: $0 < I \leq 1$.

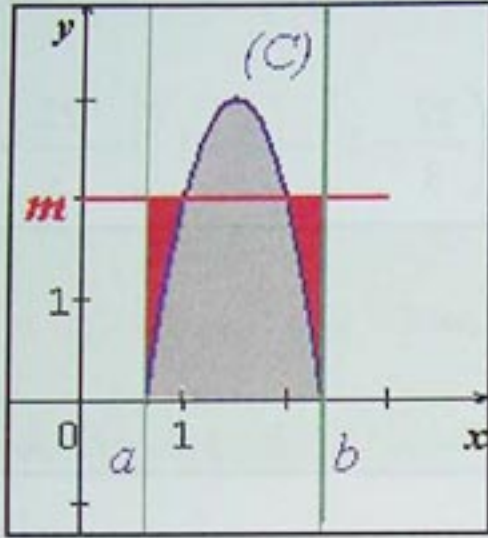
لـ القيمة المتوسطة

1. القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف: f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

التفسير البياني في حالة دالة موجبة: نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a; b]$.



ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; I, J)$.

$$m(b-a) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{يعني} \quad m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

نعلم أن $\int_a^b f(x) dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعده $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).
و هكذا فإن m ، القيمة المتوسطة لـ f على $[a; b]$ ، هي "ارتفاع" المستطيل

الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .
فلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.

2. حصر القيمة المتوسطة

خواص: f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$.

إذا وجد عدنان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a; b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$ ، فإن:

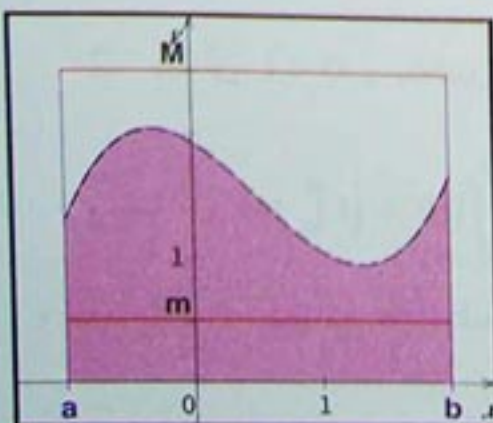
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

البرهان: من أجل كل x من $[a; b]$ لدينا: $m \leq f(x) \leq M$ و منه و باستعمال خاصية المقارنة يكون لدينا:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \quad \text{أي} \quad m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عدنان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M



$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M |b-a| \quad \text{فإن} \quad |f(x)| \leq M, \quad I \text{ من } x$$

التفسير البياني في حالة f موجبة و $m \geq 0$: مساحة الحيز تحت المنحني

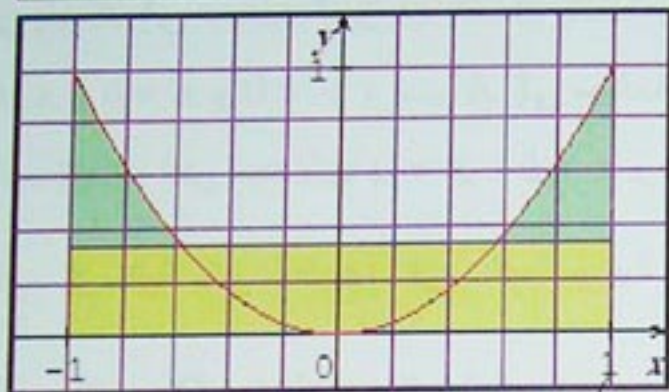
الممثل لـ f بين a و b محصورة بين مساحتي المستطيلين اللذين ارتفاعهما m و M
و عرضهما $b-a$. كما أن القيمة المتوسطة μ هي الأخرى محصورة بين a و b .

تمرين محلول 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بـ $f(x) = x^2$

1. أرسم التمثيل البياني (C) للدالة f في معلم متعامد و متجانس ثم أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;1]$.

2. فسر بيانيا النتيجة.

حل:



$$1. \mu = \frac{1}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} [x^3]_{-1}^1 = \frac{1}{3}$$

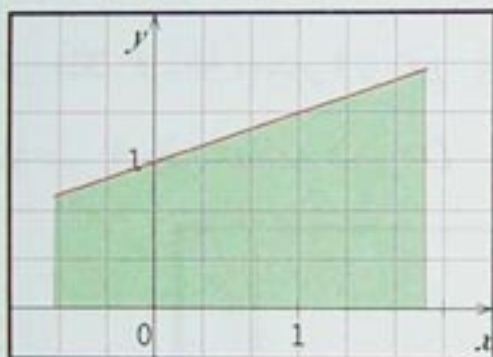
2. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها $x = -1, x = 1$ و $y = 0$ تساوي مساحة المستطيل

$ABCD$ الذي بعده 2 و $\frac{1}{3}$ علما أن $A(1;0), B(1;\frac{1}{3}), C(-1;\frac{1}{3}), D(-1;0)$

تمرين محلول 2: لتكن f دالة تآلفية موجبة على مجال $[a;b]$ حيث $a < b$.

برهن أن القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$ هي الوسط الحسابي للعددين $f(a)$ و $f(b)$.

حل: نفرض أن $f(x) = mx + P$ حيث m و p عدنان حقيقيان مع $m \neq 0$.



بما أن f موجبة على المجال $[a;b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx$ هي مساحة الحيز المحدد

بالمنحنى الممثل للدالة f (قطعة مستقيمة) و المستقيمت التي معادلاتها على الترتيب $x = a, x = b$ و $y = 0$. الحيز هنا شبه منحرف و بالتالي لدينا:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \times (b-a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

نذكر أن الوسط الحسابي للعددين $f(a)$ و $f(b)$ هو $\frac{f(a) + f(b)}{2}$

تمرين محلول 3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; +\infty]$ بـ $f(x) = 1 + \ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; e-1]$.

2. استنتج حصرا لـ $f(x)$.

3. استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I = \int_1^{e-1} f(x) dx$

حل:

1. لدينا من أجل كل x من $[-1; +\infty]$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$, إذن f متزايدة تماما على $[-1; +\infty]$ و منه على

المجال $[0; e-1]$.

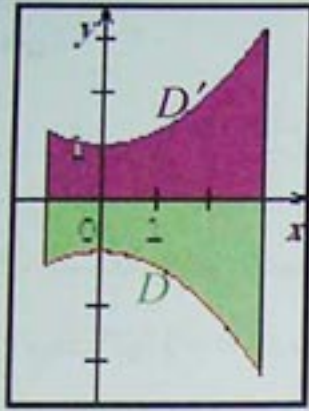
2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0; e-1]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(e-1)$, أي $1 \leq f(x) \leq 2$.

3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2) \leq \int_1^{e-1} f(x) dx \leq 2(e-2)$.

لـ التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

1. تكامل دالة سالبة على مجال

لنكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a; b]$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها

$x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$ و بـ A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f})

و بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$.

بما أن f سالبة على $[a; b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a; b]$ و بالتالي $A' = \int_a^b -f(x) dx$

الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل فمساحتهما متساويتان أي $A' = A$.

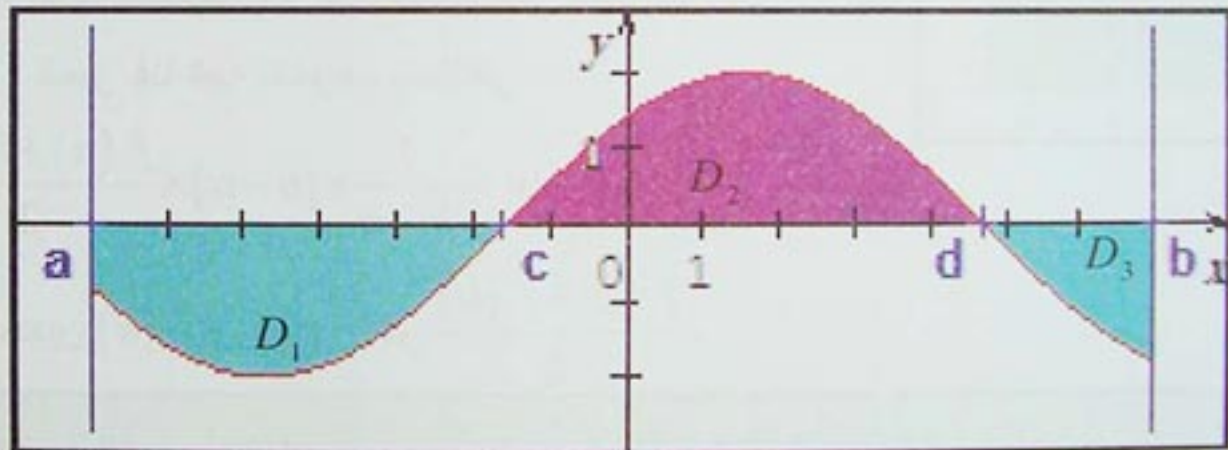
و بالتالي فإن $A = \int_a^b -f(x) dx$ أو $\int_a^b f(x) dx = -A$. نقول أحيانا أن $\int_a^b f(x) dx$ هي المساحة الجبرية للحيز D

فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a; b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a; b]$.

2. تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

لنكن مثلا f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a; b]$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$.



نلاحظ مثلا في الشكل أعلاه أن f موجبة على $[c; d]$ و سالبة على المجالين $[a; c]$ و $[d; b]$.

نرمز بـ A_1 إلى مساحة الحيز D_1 ، بـ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و بـ A_3 إلى مساحة الحيز D_3 .

لدينا $A = A_1 + A_2 + A_3$ و بما أن $A_1 = -\int_a^c f(x) dx$ ، $A_2 = \int_c^d f(x) dx$ و $A_3 = -\int_d^b f(x) dx$

$$A = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx \quad \text{فإن}$$

ملاحظة:

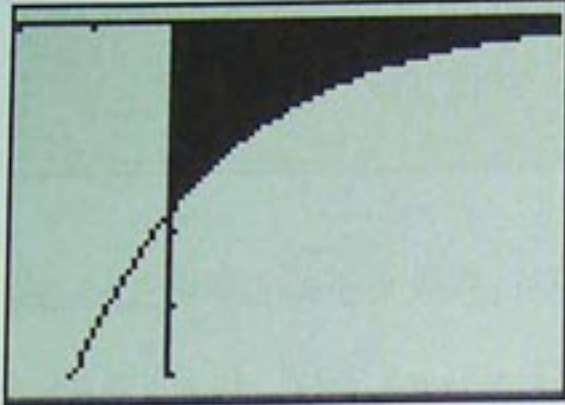
بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$ و بمنحن ممثل لدالة f

تغير إشارتها على $[a; b]$ نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق

النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

تمرين محلول 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -e^{-0.5x+1}$

- حدد إشارة $f(x)$ ثم أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحنى (C) الممثل للدالة f .
- ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما. أحسب $a(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث: $0 \leq x \leq \lambda$ و $f(x) \leq y \leq 0$. أدرس نهاية $a(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$.



حل:

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) < 0$.
- $a(\lambda) = \int_0^\lambda -f(x) dx = \int_0^\lambda e^{-0.5x+1} dx = [-2e^{-0.5x+1}]_0^\lambda$
و منه $a(\lambda) = -2(e^{-0.5\lambda+1} - e)$
بما أن $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (-0.5\lambda+1) = -\infty$ و علما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
فإن $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda) = 2e$ و منه $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-0.5\lambda+1} = 0$

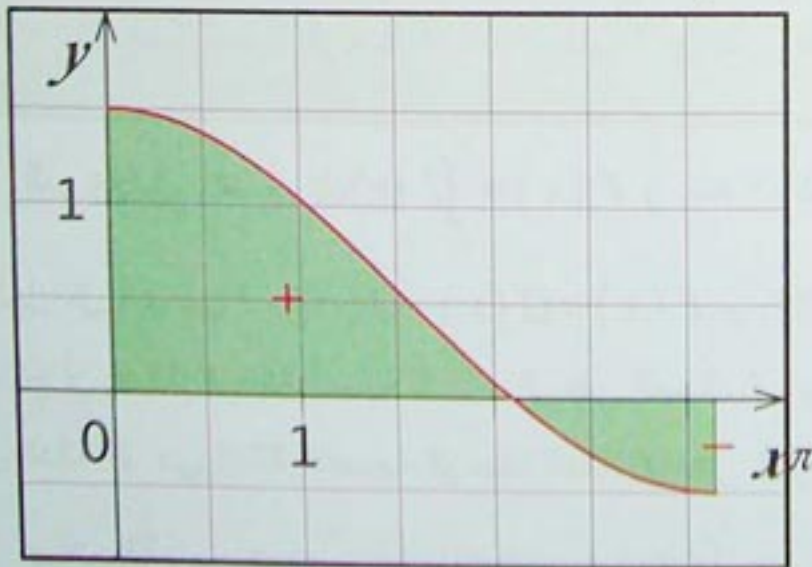
تمرين محلول 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; \pi]$ بـ $f(x) = \frac{1}{2} + \cos x$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.
- أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.
- أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\pi$ و $y=0$.

حل:

- للدالة f نفس اتجاه تغير الدالة $\cos x$ فهي إذن متناقصة تماما على المجال $[0; \pi]$.
لدينا $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(\pi) = -\frac{1}{2}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا في $[0; \pi]$

$$f(x) = 0 \text{ تعني } x = \frac{2\pi}{3}. \text{ نستنتج أنه من أجل كل } x \text{ من } [0; \frac{2\pi}{3}] \text{، } f(x) \geq 0$$



$$\text{و من أجل كل } x \text{ من } [\frac{2\pi}{3}; \pi] \text{، } f(x) \leq 0$$

2. أنظر الشكل المقابل.

$$3. \text{ لدينا } A = A_1 + A_2 \text{ حيث } A_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x) dx$$

$$\text{ و } A_2 = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} -f(x) dx$$

$$A_1 = -\left[\frac{1}{2}x + \sin x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } A_2 = \left[\frac{1}{2}x + \sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ و منه } A = \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$$

توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

1. المكاملة بالتجزئة

مبرهنة: لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I . من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

البرهان: الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على I و منه الدالة الجداء uv قابلة للاشتقاق على I و لدينا:

$(uv)' = u'v + uv'$. الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على I فهما إذن مستمرتان على I . لدينا كذلك الدالتان u' و v' مستمرتان على I و منه الدوال $u'v$ ، uv' و مجموعهما $(uv)'$ مستمرة على I . بحساب التكامل من a إلى b نحصل

$$\text{على: } \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx \text{ وباستعمال خواص الخطية نجد:}$$

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx. \text{ ولما أن الدالة } uv \text{ دالة أصلية للدالة } (uv)' \text{ فإن}$$

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx \text{ وهكذا نصل إلى النتيجة:}$$

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

2. الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة

مبرهنة: f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I .

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

البرهان: نضع $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ و منه إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على المجال I يكون لدينا:

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \text{ من أجل كل } x \text{ من } I, \text{ و بالتالي: } F(x) = G(x) - G(a).$$

نستنتج أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I . بالإضافة إلى ذلك لدينا: $F(a) = G(a) - G(a) = 0$.

إذن الدالة F هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a .

ملاحظة: من الواضح أنه إذا كانت $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ فإن $F'(x) = f(x)$.

مثال: نعلم أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ ، كما نعلم أن $\ln(1) = 0$ و بالتالي لدينا:

$$\text{من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

تمرين محلول 1: باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x \, dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 (x-1)e^x \, dx$$

طريقة: لاستعمال المكاملة بالتجزئة نكتب f على الشكل $u \times v'$.

حل:

1. نضع $v(x) = e^x$ ، $u'(x) = 1$ منه $v'(x) = e^x$ ، $u(x) = x - 1$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $I = [(x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$

و منه $I = -e$ إذن $I = 1 - [e^x]_0^1 = 1 - (e - 1) = -e$

ملاحظة: كان بالإمكان وضع $v(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ ، $u(x) = e^x$ و من ثم $v'(x) = x - 1$ ، $u(x) = e^x$

إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.

2. نضع $v(x) = -\cos x$ ، $u'(x) = 1$ منه $v'(x) = \sin x$ ، $u(x) = x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $J = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos x \, dx$

و منه $J = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن $J = -\frac{\pi}{6} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين محلول 2: عين، باستعمال المكاملة بالتجزئة، الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ و التي تنعدم عند 1.

طريقة: يمكننا دائما وضع $u(x) = u(x)v'(x)$ حيث $v'(x) = 1$.

حل:

الدالة $x \mapsto \ln x$ مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F

المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $F(x) = \int_1^x \ln(t) \, dt$

نضع $v(t) = t$ ، $u'(t) = \frac{1}{t}$ منه $v'(t) = 1$ ، $u(t) = \ln(t)$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t \, dt = x \ln x - \int_1^x 1 \, dt$

و منه $F(x) = x \ln x - [t]_1^x = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $F(x) = x \ln x - x + 1$

ملاحظة: الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$ هي الدوال $x \mapsto x \ln x - x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

و بصفة عامة نثبت بإتباع نفس الطريقة أن الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+a)$ على المجال $]-a; +\infty[$ هي

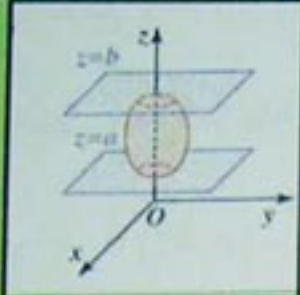
الدوال $x \mapsto (x+a) \ln(x+a) - x + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

١. بعض تطبيقات الحساب التكاملي

1. حساب أحجام بعض المجسمات البسيطة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O; I, J, K)$ محاوره $(x'x)$ ، $(y'y)$ و $(z'z)$.
وحدة الحجم (uv) هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O; I, J, K)$.

نعتبر في الفضاء مجسماً محدداً بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z = a$ و $z = b$ ($a < b$).



خاصية 1: لتكن $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستوي مواز للمستوي (xOy)

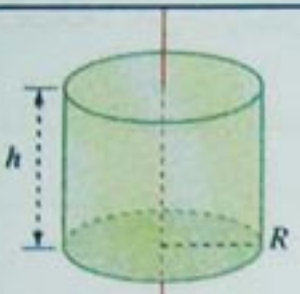
راقمه z حيث $a < z < b$.

نقبل أن حجم المجسم بوحدة الحجم هو العدد الحقيقي V حيث: $V = \int_a^b S(z) dz$

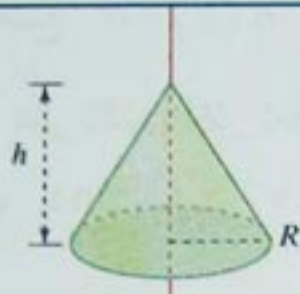
أمثلة:

لدينا في الشكل المقابل كل من:

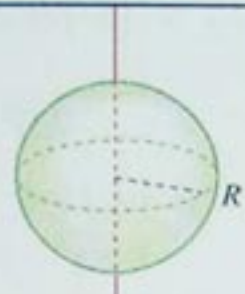
- حجم الكرة.
- حجم المخروط الدوراني.
- حجم الاسطوانة الدورانية.



$$V = \pi R^2 h$$



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

حالة خاصة: حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$

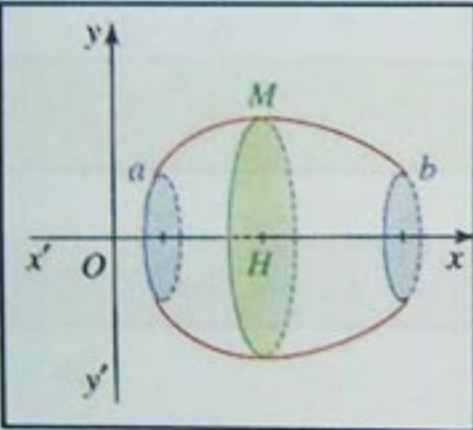
ليكن (C) المنحني الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a; b]$. دوران المنحني (C)

حول المحور $(x'x)$ يولد مساحة دورانية محورها $(x'x)$ التي بدورها تحدد مجسماً

دورانياً محوره $(x'x)$. لتكن $M(x; f(x))$ نقطة من المنحني (C) .

مقطع المجسم الناتج عن دوران المنحني (C) حول المحور $(x'x)$ بمستوي مار من M

و عمودي على $(x'x)$ هو قرص مساحته $\pi \times HM^2$ أي $\pi \times [f(x)]^2$.



خاصية 2: حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة و موجبة على

مجال $[a; b]$ هو العدد الحقيقي V حيث: $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$

2. المسافة المقطوعة على مستقيم

نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة عند اللحظة t . نعرف السرعة اللحظية $v(t)$ لهذه

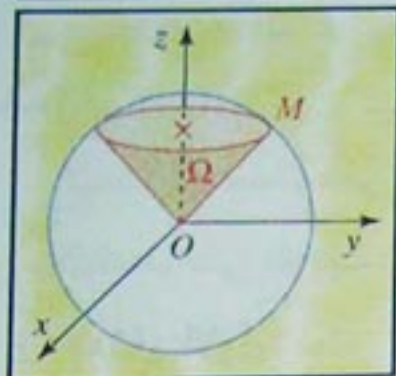
النقطة المتحركة عند اللحظة t بالعلاقة: $v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$ أي $dx = v(t) dt$

خاصية: المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 ($t_1 < t_2$) سرعتها اللحظية $v(t)$ هي:

$$x = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

تمرين محلول 1: برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

حل:



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; I, J, K)$ محاوره $(x'x)$, $(y'y)$ و $(z'z)$ الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R .
مقطع هذه الكرة بمستوى مواز للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $-R < z < R$
هي دائرة مركزها $\Omega(0;0;z)$ و نصف قطرها $r = \Omega M$ مع $OM = R$.

لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2 = R^2 - z^2$ و منه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي:

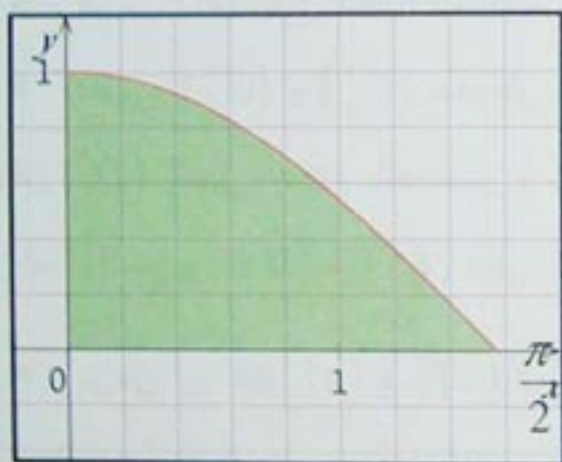
$$S(z) = \pi(R^2 - z^2) \text{ الحجم هو إذن: } V = \int_{-R}^R S(z) dz = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz \text{ و بالتالي:}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ و منه } V = \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-R}^R = \pi \left[\left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) - \left(-R^3 + \frac{1}{3} R^3 \right) \right]$$

تمرين محلول 2: ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $f: x \mapsto \cos x$ على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. أحسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل $(x'x)$.

2. أحسب v الحجم المولد بدوران المنحني (C) حول محور الفواصل $(x'x)$.



حل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$1. a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \text{ إذن } a = 1$$

$$2. v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

نعلم أن $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ و منه دالة أصلية للدالة $x \mapsto \cos^2 x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)$ على $\mathbb{R}$

$$\text{و هكذا نجد } v = \pi \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

تمرين محلول 3: من أجل $t > 0$, سرعة نقطة متحركة هي: $V(t) = 2t + e^t \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$

أحسب x المسافة المقطوعة من قبل هذه النقطة المتحركة بين اللحظتين $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$.

حل: نعلم أن $x = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ و منه $x = \int_1^2 (2t + e^t) dt$. دالة أصلية للدالة $t \mapsto 2t + e^t$ هي الدالة

$$t \mapsto t^2 + e^t$$

$$\text{و منه } x = [t^2 + e^t]_1^2 = (4 + e^2) - (1 + e) = e^2 - e + 3$$

إذن المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$ هي $(e^2 - e + 3)m$

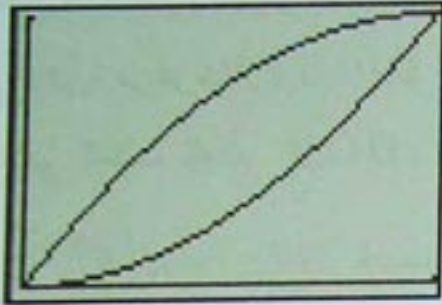
مساحة حيز محدد بمنحنيين

نعتبر دالتين f و g مستمرتين على مجال $[a; b]$ وليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البياني في معلم

متعامد $(O; I, J)$.

نهدف إلى حساب، في وضعيات مختلفة، A مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و بالمستقيمين

الذين معادلتاهما على الترتيب $x = a$ و $x = b$.



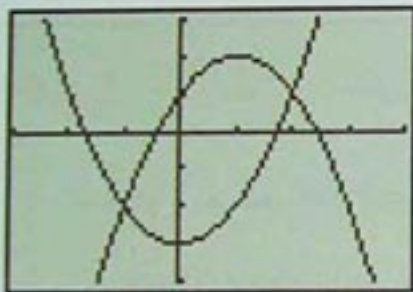
1. **المثال الأول:** نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0; 1]$ كما يلي:

$$f(x) = -x^2 + 2x \quad \text{و} \quad g(x) = x^2$$

• مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g) .

• برهن أنه من أجل كل x من $[0; 1]$ ، $f(x) \geq g(x)$.

• برر النتيجة: $A = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.



2. **المثال الثاني:** نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{و} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

• مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g) .

• أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) مع تعيين a ، b فاصلتي نقطتي تقاطعهما.

• نسمي (C'_f) و (C'_g) محولتي المنحنيين (C_f) و (C_g) على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.

و ليكن (D') الحيز المحدد بالمنحنيين (C'_f) ، (C'_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x = a$ و $x = b$.

برر لماذا للحيزين (D) و (D') نفس المساحة.

• برهن أن $A = \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.

نتيجة: إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a; b]$ بحيث من أجل كل x من $[a; b]$ ، $f(x) \geq g(x)$

فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f) ، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

3. **تطبيق:** نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$ حيث وحدة الطول هي 2cm .

1. أدرس تغيرات الدالة f محددا نهايتها عند 0 و عند $+\infty$.

2. بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

3. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (Δ) .

4. أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ، (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \frac{1}{e}$ و $x = e$.

دالة معرفة بتكامل

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1. عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g .
3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1; +\infty[$. تحقق أن $2 < \alpha < \frac{7}{4}$.
4. باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا للعدد α سعته 10^{-3} .
5. حدد، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(0) = 0$ و من أجل كل $x \neq 0$ ، $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث أن الوحدة هي $2cm$.

1. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 .
2. تحقق أن الدالة f فردية ثم أدرس نهايتها عند $+\infty$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f .
4. عين معادلة لب (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
5. بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $\ln(x+1) \leq x$.
6. استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) . أرسم (C) .

الجزء الثالث

نرمز بـ F على الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. بين أن الدالة F زوجية.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة F .
3. بين أن $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$.
4. بين أنه من أجل كل t من $[1; +\infty[$ ، $\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2+1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$.
5. من أجل كل x من $[1; +\infty[$ ، أحسب $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$.
6. استنتج نهاية كل من $F(x)$ و $\frac{F(x)}{x}$ عند $+\infty$.
7. بأخذ $F(1) = 0,4$ أرسم المنحني (C) .

موضوع محلول

تمرين : (بكالوريا)

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

يعطى جدول تغيراتها كما يلي:

x	0	2,3	x_0	2,4	$+\infty$
g	$-\infty$		0		$+\infty$

بين جميع خواص الدالة g المبينة في جدول التغيرات.

2. لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$

أ- بين أن $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$ حيث x_0 هو العدد المبين في جدول التغيرات.

ب- ليكن a عدد حقيقي. من أجل $a > 0$ عبر عن

$$\int_1^a f(t) dt \text{ بدلالة } a.$$

3. نرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

المنحنيين $\mathcal{C}_g$ و $\mathcal{C}_f$ الممثلين للدالتين f و g على

الترتيب. نسمي I النقطة التي إحداثياتها $(1; 0)$ ، نقطة

تقاطع $\mathcal{C}_g$

و محور الفواصل، M_0 النقطة من $\mathcal{C}_f$ التي لها نفس

فاصلة P_0 و H_0 المسقط العمودي لـ M_0 على محور

الترتيب. $\mathcal{D}_1$ حيز المستوي المحدد بـ المنحني $\mathcal{C}_f$ و

القطعتين $[IP_0]$ و $[P_0M_0]$. $\mathcal{D}_2$ حيز المستوي المحدد

بالمستطيل الذي بعده OI و OH_0 .

بين أن الحيزين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ لهما نفس المساحة ثم أعط

حصرا لهذه المساحة سعته 0,2

تعاليق

$$1. g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

بالنسبة للنهائيات طبق نهاية مجموع دالتين

2. ب- لاحظ أن:

$f(x) = \lambda h(x)$ حيث $h(x)$ دالة

من الشكل $u(x) \times u'(x)$

$$\int_1^a f(t) dt = F(a) - F(1)$$

3. x_0 هو فاصلة نقطة تقاطع $\mathcal{C}_g$

و محور الفواصل ($g(x_0) = 0$)

$$\frac{10}{(2,4)^2} \approx 1,74$$

$$\frac{10}{(2,3)^2} \approx 1,89$$



$$1.2. \text{ من تعريف } x_0 \text{ لدينا } \ln x_0 = \frac{2}{x_0} \text{ فيكون } f(x_0) = \frac{5 \ln x_0}{x_0} = \frac{10}{x_0^2}$$

ب- دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$ هي: $F: x \mapsto \frac{5}{2} (\ln x)^2$

$$\int_1^a f(t) dt = \left[\frac{5}{2} (\ln x)^2 \right]_1^a = \frac{5}{2} (\ln a)^2$$

$$3. \text{ مساحة الحيز } \mathcal{D}_1 \text{ هي } \frac{5}{2} (\ln x_0)^2 = \frac{5}{2} \left(\frac{2}{x_0} \right)^2 = \frac{10}{x_0^2}$$

ترتيب x_0 يساوي ترتيب النقطة M_0 ، $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$

مساحة الحيز $\mathcal{D}_2$ هي $\frac{10}{x_0^2} \times 1 = \frac{10}{x_0^2}$ ، إذن الحيزين لهما نفس المساحة

انطلاقا من $x_0 \in]2,3; 2,4[$ نجد $1,7 < \frac{10}{x_0^2} < 1,9$

حل مختصر

1. من أجل كل $x > 0$ $g'(x) > 0$

نحسب $g(2,3) \approx -0,037$

و $g(2,4) \approx 0,042$ مستمرة على

$[2,3; 2,4]$ و بما أن و بما أن

$g(2,3) \times g(2,4) < 0$ فإنه يوجد

$x_0 \in]2,3; 2,4[$ بحيث $g(x_0) = 0$

2. من تعريف x_0 لدينا $\ln x_0 = \frac{2}{x_0}$ فيكون $f(x_0) = \frac{5 \ln x_0}{x_0} = \frac{10}{x_0^2}$

ب- دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$ هي: $F: x \mapsto \frac{5}{2} (\ln x)^2$

$$\int_1^a f(t) dt = \left[\frac{5}{2} (\ln x)^2 \right]_1^a = \frac{5}{2} (\ln a)^2$$

$$3. \text{ مساحة الحيز } \mathcal{D}_1 \text{ هي } \frac{5}{2} (\ln x_0)^2 = \frac{5}{2} \left(\frac{2}{x_0} \right)^2 = \frac{10}{x_0^2}$$

ترتيب x_0 يساوي ترتيب النقطة M_0 ، $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$

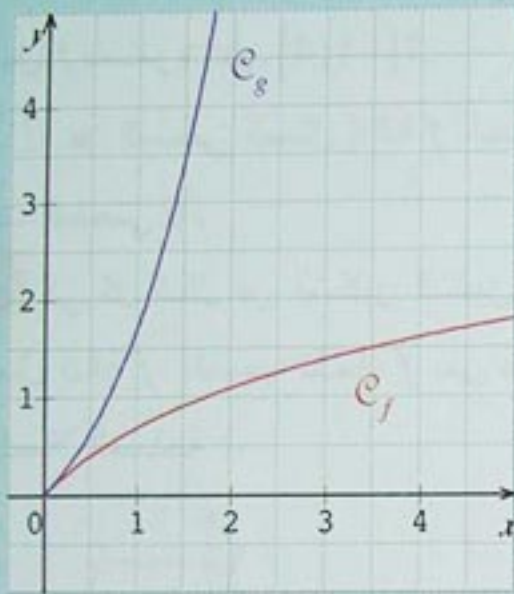
مساحة الحيز $\mathcal{D}_2$ هي $\frac{10}{x_0^2} \times 1 = \frac{10}{x_0^2}$ ، إذن الحيزين لهما نفس المساحة

انطلاقا من $x_0 \in]2,3; 2,4[$ نجد $1,7 < \frac{10}{x_0^2} < 1,9$

موضوع موجه

تنبيه

تتطلب التمارين المرتبطة بمفهوم التكامل الإلمام بالتعاريف والخواص المقدمة في الدرس. في هذه التمارين، نلاحظ أن بعض تلك التمارين يتناول الجانب الهندسي (تفسير التكامل كمساحة) في حين يعالج بعضها الآخر الجانب الجبري (حساب التكامل). ينبغي استخلاص الروابط بين الجانبين و معرفة كيفية الانتقال من أحدهما إلى الآخر.



تمرين: (بكالوريا)

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = e^x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = \ln(x+1)$$

نرمز بـ C_g و C_f التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تحقق أن المنحنيين C_g و C_f لهما مماس مشترك عند النقطة O . حدد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى هذا المماس.

2. بين أن المنحنيين C_g و C_f متناظران بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = x$.

3. ليكن a عددا حقيقي موجب تماما. نريد حساب بطريقتين مختلفتين العدد $I(a) = \int_0^a \ln(x+1) dx$

$$I(a) = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx$$

ب- استنتج قيمة $I(a)$

ج- أوجد من جديد قيمة $I(a)$ باستعمال المكاملة بالتجزئة.

توجيهات

أ- يجب إتباع التوجيهات في النص. انقل التمثيل البياني لكي تكمله فيما بعد حسب تسلسل الأسئلة.

1. المماسات تمر بالنقطة O ، تحقق أن لها نفس معامل التوجيه. لتحديد الوضعية اكتب

معادلة المماس T على الشكل $y = \alpha x + \beta$ ثم ادرس إشارة $f(x) - (\alpha x + \beta)$.

2. من أجل x و y من $[0; +\infty[$ ، بين أن $y = f(x)$ تكافئ $y =$

و هذا يعني أن $M(x; y) \in C_f$ إذا و فقط إذا كانت $M(x; y) \in C_g$.

3. أ- في الشكل، لون الحيز المطلوب، بالتناظر حيز آخر له نفس المساحة، عبر عن مساحته كفرق مساحتين معروفتين.

ب- يمكنك تعيين دالة أصلية للدالة g على $[0; +\infty[$ ثم حساب $I(a)$.

ج- ضع $u(x) = \ln(x+1)$ و $v'(x) = 1$.

1. $\mathcal{C}$ هو المنحني الممثل لدالة f . احسب مساحة الحيز تحت المنحني $\mathcal{C}$

1) f معرفة على $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$ بـ $f(x) = 2x - 1$

2) f معرفة على $[-4; -2]$ بـ $f(x) = -2x - 3$

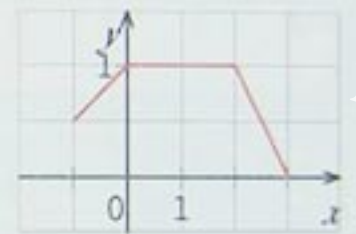
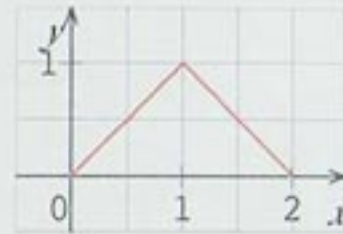
2. f هي الدالة المعرفة على $[-1; 4]$ بـ

$f(x) = |x - 1|$

1. هل f مستمرة على $[-1; 4]$ ؟

2. $\mathcal{C}$ هو المنحني الممثل لدالة f . احسب مساحة الحيز تحت المنحني $\mathcal{C}$.

3. في كل شكل من الشكلين التاليين، $\mathcal{C}$ هو المنحني الممثل لدالة f . احسب تكامل f على مجموعة تعريفها مستعملا المساحة.



4. f دالة معرفة على $[-1; 1]$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} -2x & ; x \in [-1; 0] \\ x^2 & ; x \in [0; 1] \end{cases}$$

1. أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f .

2. هل الدالة f مستمرة على $[-1; 1]$ ؟

3. احسب مساحة الحيز تحت المنحني $\mathcal{C}$.

5. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-3; 3]$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 1,5 & ; -3 \leq x \leq -1 \\ x + 2 & ; -1 < x < 0 \\ -\frac{2}{3}x + 2 & ; 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

1. ارسم المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f .

2. هل f مستمرة على $[-3; 3]$ ؟

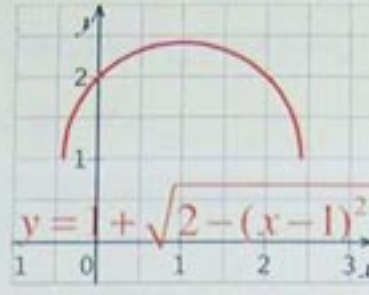
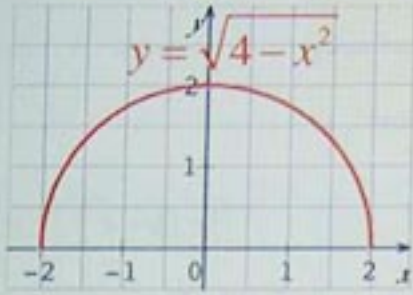
3. احسب مساحة الحيز تحت المنحني $\mathcal{C}$.

4. عبر عن هذه المساحة بتكامل.

6. في كل حالة الدالة f ممثلة بالمنحني $\mathcal{C}$ المعروف بمعادلته.

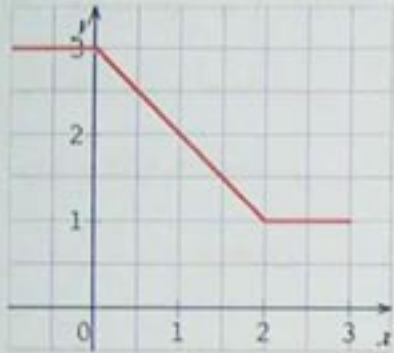
1. بين أن $\mathcal{C}$ هو نصف دائرة، حدد مركزها و نصف قطرها.

2. استنتج تكامل الدالة f على مجموعة تعريفها.



مساعدة: معادلة الدائرة التي مركزها $\omega(a; b)$ و نصف قطرها r هي $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

7. f هي الدالة المعرفة بتمثيلها البياني في الشكل المقابل.



احسب $\int_{-1}^3 f(x) dx$

$\int_0^2 f(x) dx$ ، $\int_{-1}^2 f(x) dx$

8. احسب التكاملات التالية:

$\int_{-5}^{-2} (0,4x + 3) dx$ ، $\int_1^3 (-x + 3) dx$ ، $\int_0^1 (3x + 1) dx$

• في التمارين من 9 إلى 16 احسب التكاملات:

9. (1) $\int_1^2 (x + 1)^3 dx$ (2) $\int_0^2 (0,01x^2 - x) dx$

(3) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t - 1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ (4) $\int_1^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

10. (1) $\int_1^2 2x(x^2 - 1) dt$ (2) $\int_1^{10} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

(3) $\int_3^4 \frac{5x}{(x^2 - 2)^3} dx$ (4) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$

11. (1) $\int_0^1 (3x - 6)(x^2 - 4x + 1)^3 dx$ (2) $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

(3) $\int_1^2 \frac{t^3}{t^4 + 1} dt$ (4) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

$$2. \text{ استنتج } \int_2^3 \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} dx$$

20. 1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$2. \text{ استنتج } I = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx$$

21. f معرفة على المجال $[-1; 1]$ بـ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

1. تحقق من أن C_f المنحني الممثل للدالة f هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 1 و الواقع فوق محور الفواصل.

$$2. \text{ استنتج أن } \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

22. 2. لتكن الدالة f المعرفة على $[-1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{4}{(x + 1)^2}$$

و C_f تمثيلها البياني في الشكل المقابل

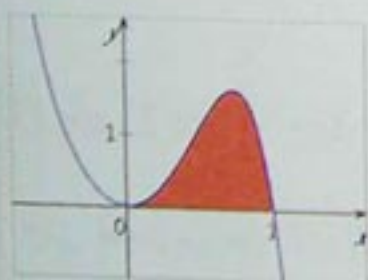
$$1. \text{ احسب } \int_1^3 f(x) dx$$

2. فسر بيانيا هذه النتيجة.

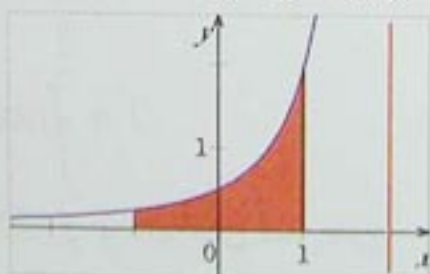
$$3. \text{ احسب } \int_0^3 f(x) dx$$

23. في الحالات الأربع التالية، احسب مساحة الحيز

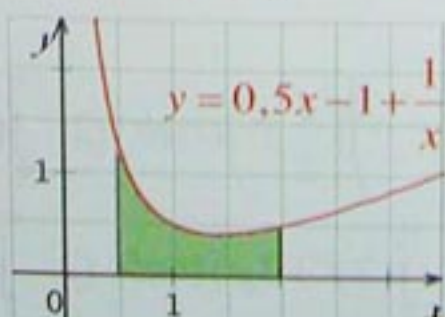
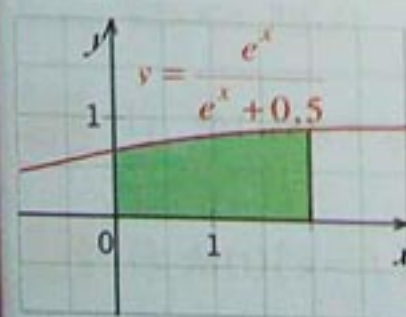
الملون مقدرة بوحدة المساحات



$$y = -5x^2(x^3 - 1)$$



$$y = \frac{2}{(x-2)^2}$$



$$\int_0^3 \frac{1}{(2t+1)^2} dt \quad (2)$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \quad (1) \quad 12$$

$$\int_0^\pi \sin(2t) dt \quad (4)$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx \quad (3)$$

$$\int_0^\pi \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt \quad (2)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \quad (1) \quad 13$$

$$\int_{-2}^2 \frac{x}{x^2-9} dx \quad (4)$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x} dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 3e^{4x} dx \quad (2)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2x+3} dx \quad (1) \quad 14$$

$$\int_0^1 t e^{t^2-1} dt \quad (4)$$

$$\int_{-1}^1 e^{4t+5} dt \quad (3)$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos x dx \quad (2)$$

$$\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx \quad (1) \quad 15$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 3t e^{t^2+1} dt \quad (3)$$

$$\int_0^1 2^{3x} dx \quad (2)$$

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x^2} dx \quad (1) \quad 16$$

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2 + \sqrt{2}} dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 (3t^2 + 1) e^{2t^3+2t} dt \quad (3)$$

17. 1. جد عددين حقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد

$$\text{حقيقي } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-3; 3\} \quad \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$

$$2. \text{ استنتج } \int_{-1}^2 \frac{1}{x^2 - 9} dx$$

18. 1. جد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل

$$\text{عدد حقيقي } x \text{ من } \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 2\right\} :$$

$$\frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2} = a + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{x-3}$$

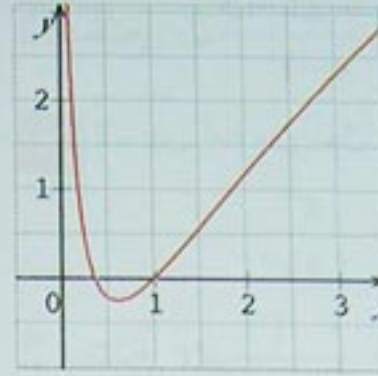
$$2. \text{ استنتج } \int_3^4 \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2} dx$$

19. 1. جد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل

$$\text{عدد حقيقي } x \text{ من } \mathbb{R} - \{1\} :$$

24 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \ln x + (\ln x)^2$$



و C_f تمثيلها البياني في معلم

متعامد و متجانس (الشكل)

1. بين أن الدالة g المعرفة

على $[0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x(\ln x)^2 - x \ln x + x$$

أصلية للدالة f على $[0; +\infty[$.

2. α عدد حقيقي أكبر تماماً من 1. احسب $A(\alpha)$ المساحة

للحيز المحدد بالمنحنى C_f و محور الفواصل و المستقيمين

الذين معادلتاهما $x = \alpha$ و $x = 1$.

3. عين قيمة α بحيث يكون $A(\alpha) = 2\alpha - 1$.

2 - خواص التكامل

25 f دالة مستمرة على $[0; 3]$ حيث من أجل كل عدد

$$\frac{1}{3}x + 1 \leq f(x) \leq 2, \quad x \in [0; 3]$$

1. أفسر بيانيا المتباينتين.

2. أعط حصراً لمساحة الحيز تحت المنحنى الممثل للدالة f

26 احسب في كل حالة من الحالات التالية باستعمال

خواص التكامل ، التكاملات التالية:

$$I = \int_1^e \ln t \, dt + \int_1^e \left(t + \ln \frac{1}{t} \right) dt \quad (1)$$

$$J = \int_1^e \ln(1+t^2) \, dt + \int_1^e \ln(1+t^2) \, dt \quad (2)$$

$$J = \int_1^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \, dx - \int_1^{\frac{7\pi}{6}} \cos 2x \, dx \quad (3)$$

• في التمارين من 27 إلى 29 f و g دالتان معرفتان

$$\int_5^{10} g(t) \, dt = -5 \quad \text{و} \quad \int_5^{10} f(t) \, dt = 4 \quad \text{حيث} \quad [5; 10]$$

احسب التكاملات التالية:

$$\int_5^{10} \left(\frac{5}{2} f \right)(t) \, dt \quad (2) \quad \int_5^{10} (f+g)(t) \, dt \quad (1) \quad 27$$

$$\int_5^{10} (2f+3g)(t) \, dt \quad (2) \quad \int_5^{10} (f-g)(t) \, dt \quad (1) \quad 28$$

$$\int_5^{10} (2f-g)(t) \, dt \quad (2) \quad \int_5^{10} \left(-f + \frac{2}{3}g \right)(t) \, dt \quad (1) \quad 29$$

30 احسب التكامل I حيث:

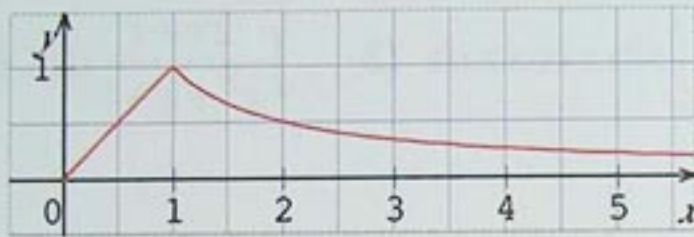
$$I = \int_{-1}^1 [|x| + |x+1|] \, dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t| \, dt \quad \text{احسب} \quad 31$$

32 هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & ; x > 1 \end{cases}$$

و C هو تمثيلها البياني في الشكل التالي:



احسب التكاملين التاليين:

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \, dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^3 f(x) \, dx$$

33 قارن، بدون حساب، بين التكاملين I و J :

$$J = \int_0^1 t^2 e^t \, dt \quad ; \quad I = \int_0^1 t e^t \, dt \quad (1)$$

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx \quad ; \quad I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx \quad (2)$$

$$J = \int_1^2 u^2 \sin u \, du \quad ; \quad I = \int_1^2 u \sin u \, du \quad (3)$$

34 بدون حساب التكاملات التالية عين إشارتها:

$$\int_{-3}^{-2} \sqrt{2-x} \, dx \quad (2) \quad \int_2^3 \sqrt{x-1} \, dx \quad (1)$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{1}{t-2} \, dt \quad (4) \quad \int_0^3 (t^2 + t + 1) \, dt \quad (3)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(u+1) \, du \quad (5) \quad \int_0^2 -e^{-u+1} \, du \quad (4)$$

35 بين أن من أجل كل $t \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$:

$$1 \leq \frac{1}{\cos t} \leq \sqrt{2}$$

2. استنتج أن $\frac{\pi}{4} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos t} dt \leq \pi \frac{\sqrt{2}}{4}$

3 - القيمة المتوسطة

36 احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في

الحالتين التاليتين:

$$I = [-1; 1], \quad f(x) = 2x + 3$$

$$I = [-2; 2], \quad f(x) = |x|$$

37 بين ما يلي:

$$(1) \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x \, dx \geq -\frac{\ln 2}{2}$$

$$(2) \int_1^2 \frac{1}{1+x^3} \, dx \leq \frac{1}{2}$$

$$(3) -\frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x^2 + 1) \, dx \leq \frac{\pi}{2}$$

38 1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; 1]$:

$$\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x+1} \leq x^2$$

2. استنتج حصرا للتكامل $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx$

39 أثبت ما يلي:

$$(1) \int_0^1 x^2 \cos(x) \, dx \leq \frac{1}{3} \quad (2) \int_1^4 \cos(x^2) \, dx \leq 3$$

$$(3) \int_0^1 \cos(x) \, dx \geq \frac{1}{2}$$

40 1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب t :

$$1-t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$$

2. استنتج أن $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

• في التمارين من 41 إلى 43 المطلوب:

1. ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 1]$

2. بين أنه كل عدد حقيقي x من $[0; 1]$:

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

3. استنتج حصرا للتكامل $\int_0^1 f(x) \, dx$

$$41 \quad f(x) = e^x - 1$$

$$42 \quad f(x) = -\frac{1}{x+1}$$

$$43 \quad f(x) = \ln(x+2) - 3$$

• في التمرينين 44 و 45 بين الحصر المعطى:

$$44 \quad (1) \quad \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} \, dx \leq 1$$

$$(2) \quad \frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx \leq 9$$

$$45 \quad (1) \quad \sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{x^3+1} \, dx \leq 3$$

$$(2) \quad \frac{2}{e^4} \leq \int_0^2 e^{-x^2} \, dx \leq 2$$

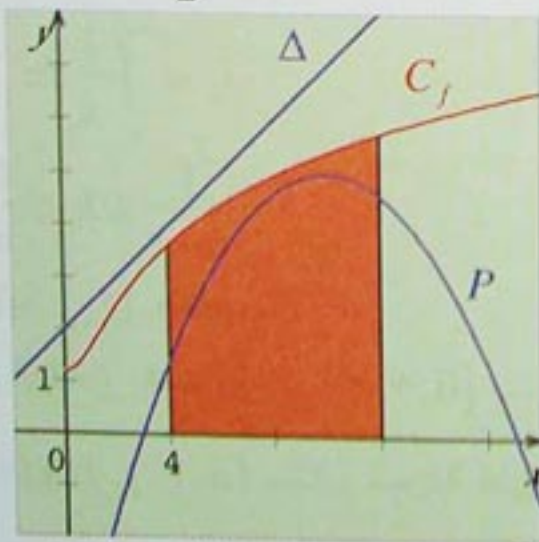
$$(3) \quad 2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2-1) \, dx \leq 2 \ln 3 + 2 \ln 5$$

46 في الشكل التالي لدينا:

- المنحني C_f الممثل لدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$

- القطع المكافئ P الذي معادلته $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5$

- المستقيم Δ الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x + 2$



نعتبر المساحة A لمجموعة النقط $M(x; y)$ بحيث:

$$0 \leq y \leq f(x) \quad \text{و} \quad 4 \leq x \leq 12$$

1. باستعمال الشكل بين أن:

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n > \frac{n-1}{2}$

هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

4. التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

• في التمارين من 53 إلى 55 تحقق أن الدالة f مستمرة

وسالبة على المجال $I = [a; b]$ ثم احسب $\int_a^b f(x) dx$

53 $I = [-3; -1]$ ، $f(x) = 2x - 3$

54 $I = [-1; 0]$ ، $f(x) = x^2 + 2x - 3$

55 $I = [-2; 1]$ ، $f(x) = -x^3 + x$

56 f دالة معرفة على المجال $[2; 5]$ بـ $f(x) = x - 3$

احسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحني الدالة f

و محو الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما :

$x = 5$ و $x = 2$

57 f معرفة على المجال $I = [-2; 3]$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; x \in [-2; 2] \\ 2x - 6 & ; x \in [2; 3] \end{cases}$$

ارسم المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ثم

احسب $\int_{-2}^3 f(x) dx$

58 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1; 5]$ بـ :

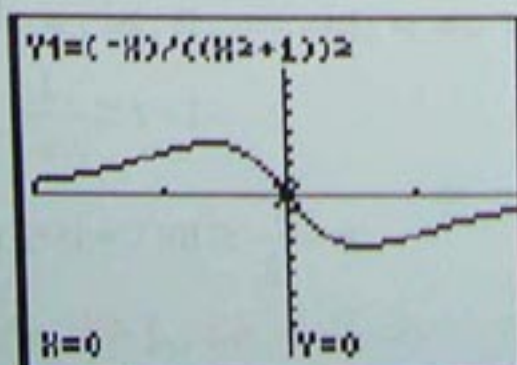
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & ; 0 < x \leq 3 \\ x-5 & ; 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

احسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحني الدالة f

الممثل في معلم متعامد ، محو الفواصل و المستقيمين اللذين

معادلتاهما : $x = 5$ و $x = -1$

59 المنحني المرسوم (C) معادلته $y = \frac{-x}{(x^2 + 1)^2}$



$$\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$$

2. استنتج حصرا للمساحة A

47 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \int_0^1 (1+x^n) dx$

1. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2. هل (u_n) متقاربة؟

48 احسب القيمة المتوسطة μ على المجال $[-1; 1]$

للدالة $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

49 في كل حالة من الحالات التالية μ هي القيمة

المتوسطة لدالة مستمرة f على المجال I . احسب التكامل المطلوب

(1) $\int_1^4 f(x) dx$ ، $I = [1; 4]$ ، $\mu = 2$

(2) $\int_1^3 f(x) dx$ ، $I = [1; 3]$ ، $\mu = \ln 2$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ ، $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ، $\mu = \frac{2}{\pi}$ و f زوجية

50 جد حصرا للقيمة المتوسطة للدالة f على المجال

المعطى في كل حلة من الحالات التالية:

(1) $I = [0; 1]$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

(2) $I = [1; e]$ ، $f(x) = \ln x$

(3) $I = [1; \sqrt{2}]$ ، $f(x) = e^{x^2}$

51 من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع:

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

1. بين أن $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

2. هل المتتالية (I_n) متقاربة؟

52 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ

$f(x) = \frac{x}{x+1}$ و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = \int_0^n f(x) dx$$

1. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

1. عين المساحة A_1 لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ، محور الفواصل و المستقيم D الذي معادلته $x=1$.
2. أ- اكتب معادلة المماس T للمنحني (C) عند المبدأ.
ب- حدد وضعية (C) بالنسبة إلى T .

- ج- احسب المساحة A_2 للمثلث المحدد بـ T ، محور الفواصل و المستقيم D (مقدرة بوحدة المساحات)
3. استنتج المساحة A لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ، المماس T و المستقيم D (مقدرة بوحدة المساحات).

4. أ- احسب $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{-x}{(x^2+1)} dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماماً.

- ب- عين نهاية $I(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$. فسر بيانها هذه النتيجة.

5 - توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

60. 1. x عدد حقيقي موجب تماماً. باستعمال المكاملة

$$\text{بالتجزئة، احسب } \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$$

2. استنتج دالة أصلية للدالة $\frac{\ln x}{x^2} : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0; +\infty[$

- في التمارين من 61 إلى 64 وباستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكاملين I و J

$$61 \quad (1) \quad I = \int_1^e x \ln x dx \quad (2) \quad J = \int_2^e \ln(x-1) dx$$

$$62 \quad (1) \quad I = \int_0^{\pi} x \cos x dx \quad (2) \quad J = \int_0^1 x e^x dx$$

$$63 \quad (1) \quad I = \int_{-1}^0 x \sqrt{1-x} dx \quad (2) \quad J = \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx$$

$$64 \quad (1) \quad I = \int_1^2 (x-2)e^x dx \quad (2) \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3x \sin 3x dx$$

$$65 \quad 1. \text{ نضع: } I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x+1)^2} dx \quad \text{و} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة عبر عن I بدلالة J .

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

- ب- استنتج قيمة J .

3. احسب قيمة I .

66. باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين، احسب التكاملين التاليين:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

67. من أجل كل عدد طبيعي n نضع

$$I_n = \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين احسب I_n بدلالة n .

- في التمارين من 68 إلى 70 f دالة مستمرة على

المجال I يشمل a . باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة

أصلية F للدالة f على I بحيث $F(a) = 0$

$$68 \quad]0; +\infty[\quad I =]0; +\infty[\quad a = 1, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$69 \quad I = \mathbb{R} \quad a = 0, \quad f(x) = 2x e^{-x}$$

$$70 \quad]0; +\infty[\quad I =]0; +\infty[\quad a = 1, \quad f(x) = x^2 \ln x$$

$$71 \quad \text{نضع: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx \quad \text{و} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$$

1. احسب $I + J$.

$$2. \text{ أ- تحقق أن } I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx$$

- ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب $I - J$

3. استنتج قيمة كل من I و J .

5 - بعض تطبيقات الحساب التكاملي

72. ليكن (C) التمثيل البياني على المجال $[0; 1]$ للدالة

$$f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$$

1. احسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)

و محور الفواصل $(x'x)$.

2. احسب v الحجم المولد بدوران المنحني (C) حول

محور الفواصل $(x'x)$.

73. ليكن (C) التمثيل البياني على المجال $[0; 1]$ للدالة

$$f : x \mapsto (x-1)e^x$$

1. أحسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل (x, x') .

2. أحسب v الحجم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل (x, x') .

تمارين للتعمق

• في التمرينين 74 و 75 استعمل شفعية الدالة f لتعيين قيمة التكامل المعطى:

74 (1) $\int_{-1}^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt$ (2) $\int_{-3}^3 (x^3 + \sin x) dt$

75 (1) $\int_{-1}^1 \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt$ (2) $\int_{-0.7}^{0.7} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dt$

• في التمارين من 76 إلى 82 احسب التكاملات

76 (1) $\int_0^1 7x(x^2 + 1) dx$ (2) $\int_0^3 \frac{x+2}{(x^2 + 4x)^3} dx$

77 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t) dt$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} dt$

78 (1) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2t+1}} dt$ (2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

79 (1) $\int_1^3 e^{3x+5} dx$ (2) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \sin x e^{\cos x} dx$

80 (1) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$ (2) $\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x+2} dx$

مساعدة: $\frac{x^2 - 1}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$

81 (1) $\int_e^2 \frac{1}{x \ln x} dx$ (2) $\int_{-1}^3 \frac{e^{2t} - e^t + 3}{2e^t} dt$

82 (1) $\int_{-1}^3 \frac{e^{2t} - e^t + 3}{2e^t} dt$ (2) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$

مساعدة: لاحظ أن $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

83 1. احسب التكامل $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

2. ليكن $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$ احسب $I_1 + I_2$ ثم استنتج قيمة I_2 .

84 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (1-x)e^x$

1. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ حيث f' و f'' هما على الترتيب المشتقة الأولى و المشتقة الثانية للدالة f .

2. استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x) dx$

85 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$

1. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x) + 2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$

حيث f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f .

2. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$\frac{2e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} = e^{-x} - 2 - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2}$

3. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

4. α عدد حقيقي موجب تماماً. احسب المساحة $A(\alpha)$

للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = \alpha$.

86 ليكن التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x} dx$

1. احسب التكامل $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx$

2. احسب $I + J$ ثم استنتج قيمة I .

87 r عدد حقيقي موجب تماماً. $\mathcal{C}$ هو المنحنى الذي

معادلته $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

1. حدد مجموعة النقط M التي إحداثياتها $(x; y)$ حيث

$0 \leq x \leq r$ و $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$

2. استنتج $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ و $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$

88 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}$$

1. ا- عين الأعداد الحقيقية a, b, c و d بحيث من

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}, \quad x \neq 1 \text{ يكون}$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \text{ ب- احسب}$$

2. احسب باستعمال الكاملة بالتجزئة، التكامل J حيث:

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 12x + 1) \ln(1-x) dx$$

89 من بكالوريا

$$f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x} \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ}$$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$$

2. استنتج حصرا لمساحة حيز المستوي المكون من

مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث:

$$0 \leq y \leq f(x) \text{ و } 1 \leq x \leq \lambda$$

90 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي $\mathcal{C}_r$ هو

التمثيل البياني للدالة $\sin$ على $[0; \pi]$

1. لكل عدد حقيقي x من $[0; \pi]$ ، نرفق النقطتين A و B

التي فاصلتهما x تقعان على الترتيب على محور الفواصل

و على المنحني $\mathcal{C}_r$.

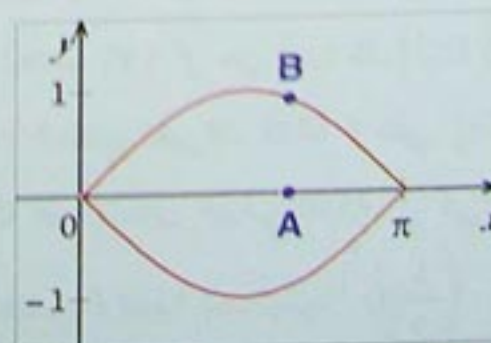
القطعة $[AB]$ تدور حول المحور $(O; \vec{i})$ تولد قرصا في

الفضاء.

عبر عن مساحة هذا القرص بدلالة x .

2. احسب حجم المجسم المولد بدوران المنحني $\mathcal{C}_r$ حول

محور الفواصل.



• في التمارين من 91 إلى 96 باستعمال الكاملة

بالتجزئة ، جد دالة أصلية F للدالة f المعرفة على المجال

I تتعدم من أجل القيمة a

$$91 \quad a=1, \quad I=[0; +\infty[\quad , \quad f(t) = \ln(t^2)$$

$$92 \quad a=0, \quad I=\mathbb{R} \quad , \quad f(t) = (2t+1) \sin t$$

$$93 \quad a=0, \quad I=[-2; +\infty[\quad , \quad f(t) = \ln(t+2)$$

$$94 \quad a=-1, \quad I=\mathbb{R} \quad , \quad f(t) = (t+1)^2 e^{2t}$$

استعمل الكاملة بالتجزئة مرتين.

$$95 \quad a=0, \quad I=\mathbb{R} \quad , \quad f(t) = \cos t e^{-2t}$$

استعمل الكاملة بالتجزئة مرتين

$$96 \quad a=1, \quad I=[0; +\infty[\quad , \quad f(t) = (\ln t)^2$$

استعمل الكاملة بالتجزئة مرتين.

$$97 \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n, \text{ نضع } u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; 1]$ و من أجل

$$\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

2. استنتج حصرا للعدد u_n ثم بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$\text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$$

98 من بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 0[$ بـ

$$f(x) = 1 - \frac{\ln(x^2)}{x}$$

1. ادرس تغيرات الدالة f .

2. ادرس وضعية المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم

الذي معادلته $y = 1$.

3. 3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α

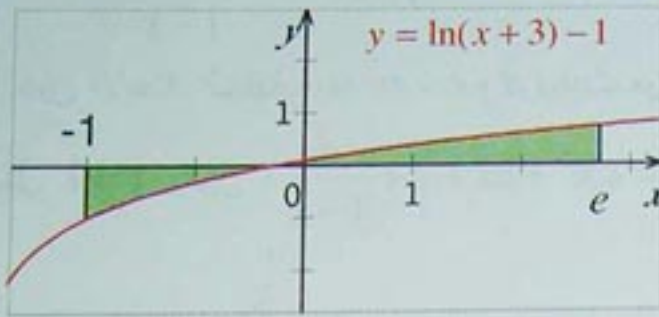
$$\text{حيث } -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$$

4. احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحني $\mathcal{C}$

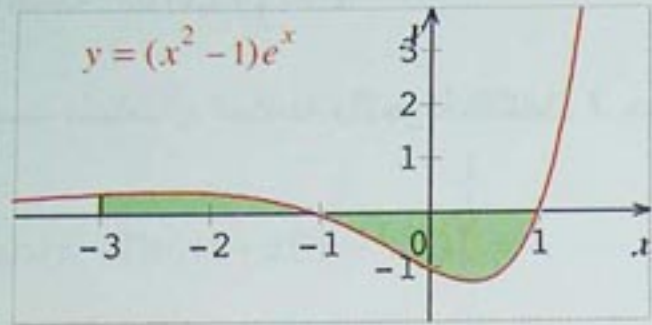
و المستقيمت التي معادلاتها $x = -1$ و $x = \alpha$ و $y = 1$

5. بين أن $A(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4}$ ثم استنتج حصرا لـ $A(\alpha)$

في التمرينين 101 و 102 احسب بـ وحدة المساحات
(u.a) مساحة الحيز الملون



101



102

103 G و F دالتان أصليتان على $]0; +\infty[$

للدالتين $t \mapsto \cos(\ln t)$ و $t \mapsto \sin(\ln t)$ على الترتيب
و اللتان تتعدمان عند 1 .

الهدف من هذا التمرين تعيين هاتين الدالتين الأصليتين

انطلاقا من التكاملين $F(x) = \int_1^x \cos(\ln t) dt$

و $G(x) = \int_1^x \sin(\ln t) dt$

1. بين باستعمال المكاملة بالتجزئة أن :

$$F(x) = x \cos(\ln x) - 1 + G(x)$$

$$G(x) = x \sin(\ln x) - F(x) \quad \text{و}$$

2. استنتج عبارتي $G(x)$ و $F(x)$

104 الهدف من هذا التمرين هو البرهان أن :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}$$

1. لتكن الدالة f المعرفة على $[0; 1]$ كما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

أ- بين أن مستمرة و موجبة على $[0; 1]$

ب- احسب $f'(x)$ من أجل كل $x \in [0; 1]$

ج- استنتج تغيرات الدالة f على $[0; 1]$

2. هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد

ومتجانس. I نقطة إحداثياتها $(\frac{1}{2}; 0)$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x+1} - x - 2$$

1. ادرس إشارة $f(x) - (-x - 2)$ على $\mathbb{R}$

2. احسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $\mathcal{C}$

الممثل للدالة f و المستقيمات التي معادلاتها :

$$x = \alpha \quad \text{و} \quad x = 0, \quad y = -x - 2$$

موجب تماما.

3. نعرف متتالية عددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_n = A(n) + 4e$$

من أجل $\alpha = n$.

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية ، عين حدها الأول

و أساسها.

100 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

1. بين أنه من أجل كل حيث : $x > 1$

$$\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

2. أ- احسب $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$ و $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$ (يمكن

استعمال المكاملة بالتجزئة لحساب J .)

ب- استنتج حصرا لـ $K = \int_2^4 f(x) dx$

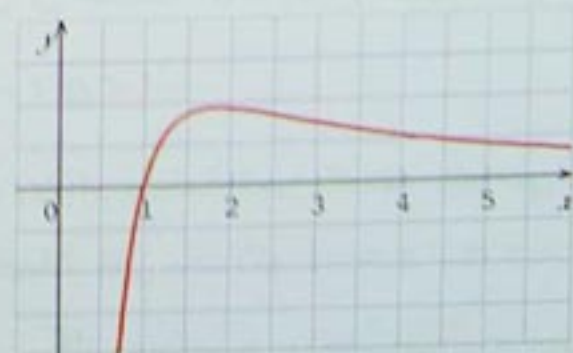
3. الشكل التالي هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد

حيث الوحدة هي 1cm على محور الفواصل و 4cm على

محور الترتيب. نعتبر مجموعة النقاط $M(x; y)$ حيث

$$2 \leq x \leq 4 \quad \text{و} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

و نرمز بـ A إلى مساحتها.



- باستعمال الحصر الموجود في السؤال 2. ب) أعط حصرًا

لـ A بـ cm^2 .

أ- M نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها x ($0 \leq x \leq 1$). احسب IM^2
 ب- بين أن $\mathcal{C}$ هي نصف دائرة. حدد مركزها و نصف قطرها. ارسم $\mathcal{C}$

3. أ- فسر هندسيا التكامل $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$

ب- استنتج المطلوب.

105 بكالوريا

الهدف من هذا التمرين حساب التكاملات التالية:

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx, \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx \quad \text{و}$$

1. لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$$

أ- احسب مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$

ب- استنتج f' مشتقة الدالة f .

ج- احسب قيمة I .

2. أ- بدون حساب J و K ، تحقق أن $J + 2I = K$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة على K بين أن:

$$K = \sqrt{3} - J$$

ج- استنتج قيمتي J و K .

106 بكالوريا

من اجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر العددين الحقيقيين

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx \quad \text{و} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$$

1. احسب I_0 و J_0

2. نضع $n \geq 1$

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن:

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

ب- استنتج عبارتي I_n و J_n بدلالة n .

107 بكالوريا

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{من اجل } n \geq 2$$

$$\text{و } v_n = u_n - \ln n \quad \text{من اجل } n \geq 1$$

1. أ- احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

ب- بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

2. أ- بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم k :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

ب- استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n \leq 1 \quad \text{و} \quad u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$$

3. أ- بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4. بين أن المتتالية (v_n) متقاربة. نرمز بـ γ إلى نهاية

المتتالية (v_n) (لا نريد حساب γ).

ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

108 بكالوريا

f دالة معرفة على $[0;2]$ بـ $f(x) = (x-2)e^x$

$\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. ادرس تغيرات f ثم ارسم $\mathcal{C}$.

2. S هي جزء المستوي المحدد بالمنحني $\mathcal{C}$ و محور

الفواصل. احسب القيمة المضبوطة لمساحة S ، ثم أعط

قيمة تقريبية إلى 10^{-2} بالزيادة لهذه المساحة.

3. بالدوران حول المحور $(x'x)$ ، $\mathcal{C}$ تولد مجسما حجمه V

أ- جد الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث تكون الدالة

المعرفة بـ $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ أصلية للدالة

f^2 على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج القيمة المضبوطة للحجم V ، ثم أعط قيمة

تقريبية إلى 10^{-3} بالزيادة لهذا المساحة.

1. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 e^{1-x}$.
ليكن $\mathcal{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة $2cm$.
أ- عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و عين دالتها المشتقة f' .

ج- شكل جدول تغيرات f و ارسم المنحنى $\mathcal{C}$.
2. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نعرف التكامل I_n

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

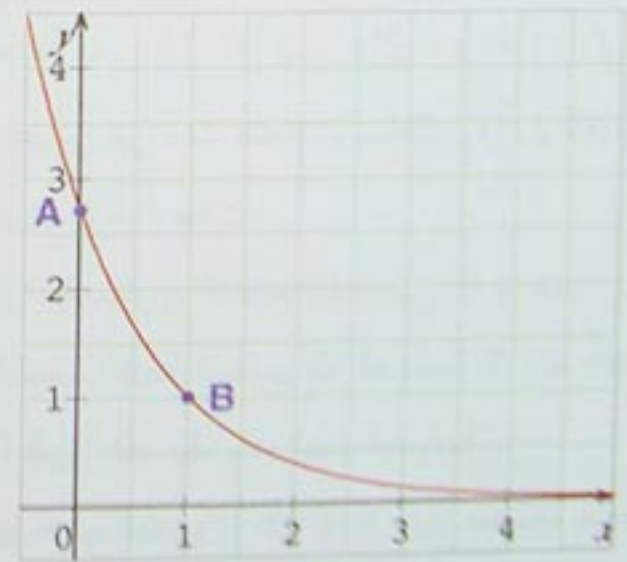
أ- عين علاقة بين I_n و I_{n+1} .
ب- احسب I_1 ثم I_2 .

ج- أعط تفسيرا هندسيا للتكامل I_2

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; 1]$ و من أجل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$
ب- استنتج حصرا لـ I_n ، ثم نهاية I_n لما يؤول n إلى $+\infty$

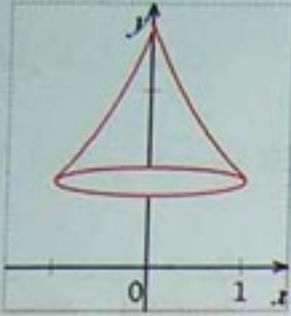
110 بكالوريا

مثلا في الشكل التالي في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى البياني لدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حل المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ حيث $f(0) = e$.



1. عين $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .
2. ليكن t عدد حقيقي من المجال $[1; e]$
حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $e^{1-x} = t$
3. لتكن A النقطة التي فاصلتها 0 و B النقطة التي فاصلتها 1 من المنحنى.

نعتبر الجسم المحصل بدوران قوس المنحنى $\widehat{AB}$ حول محور الترتيب كما هو مبين في الشكل،



نرمز بـ v إلى حجم هذا الجسم

$$v = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$$

أحسب v باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين.

111 بكالوريا

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; 1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

$$2. \text{ أ- احسب } \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$$

ب- استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n}$$

3. نسمي U المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ:

$$U(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

بين أن المتتالية U متناقصة (يمكن استعمال السؤال 2. ب.)

4. نعتبر المتتالية V المعرفة بـ:

$$V(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

بين أن V متزايدة.

5. بين أن U و V تتقاربان نحو نفس النهاية ℓ . عين قيمة

مقربة إلى 10^{-2} للعدد ℓ .

u متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

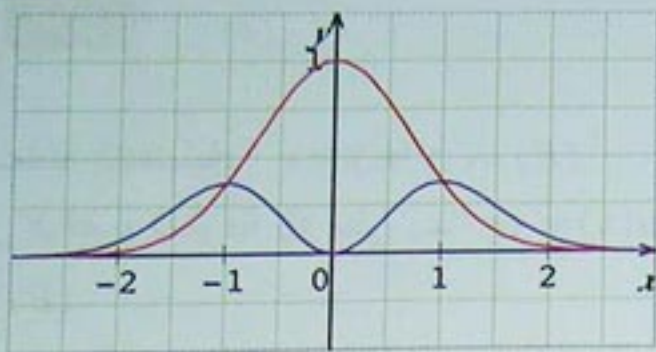
1. أنشئ في معلم متعامد و متجانس المنحنى الممثل

$$\text{للدالة } \frac{1}{x} : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ على }]0; +\infty[$$

2. أ- على المجالات $[1; 2]$ ، $[2; 3]$ و $[3; 4]$ أنشئ على

الترتيب المستطيلات R_1 ، R_2 و R_3 التي ارتفاعاتها $\frac{1}{2}$ ،

$\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ المستطيلات R'_1 ، R'_2 و R'_3 التي ارتفاعاتها



1. ميز في الشكل المنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ (مع التبرير)
2. ادرس شفعية الدالتين f و g .
3. ادرس اتجاه تغير الدالتين f و g . احسب النهايتين عند $+\infty$.

4. ادرس الوضعية النسبية لـ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

الجزء B: نعتبر الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

1. ماذا يمثل G بالنسبة إلى الدالة g ؟
2. من أجل $x > 0$ ، أعط تفسيرا لـ $G(x)$.
3. ادرس تغيرات الدالة G على $\mathbb{R}$.

نعرف الدالة F على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

4. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$$

يمكن البدء بالمقارنة بين مشتقتي الدالتين G و F والدالة

$$x \mapsto F(x) - x e^{-x^2}$$

- نقبل أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عند $+\infty$ وأن هذه النهاية هي مساحة الحيز A المحدد بالمنحني $\mathcal{C}_f$ و المحورين $(O; \vec{i})$ و $(O; \vec{j})$ مقدرة بوحدة المساحات.
5. أ- بين أن الدالة G تقبل نهاية عند $+\infty$ يطلب تعيينها.

ب- فسر باستعمال المساحة العدد $N = \int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt$

- ج- نقبل أن نهاية الدالة G عند $+\infty$ تمثل المساحة P (مقدرة بوحدة المساحات) للحيز D المحدد بالمنحني $\mathcal{C}_g$ و المحور $(O; \vec{i})$.

$$\int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt \geq \frac{\ell}{2}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$$-\text{استنتج أن } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \leq \int_1^4 \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

ب- n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ نعتبر بنفس الطريقة السابقة

المجالات $[1; 2], [2; 3], \dots, [n-1; n]$ و

المسططيات $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ التي ارتفاعاتها

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \text{ و المستطيات } R'_1, R'_2, \dots, R'_{n-1}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}$$

التي ارتفاعاتها 1، $\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-1}$

- تحقق أن :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

- حدد ماذا يمثل كمساحة كل حد من المتباينة.

3. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $0 \leq u_n \leq 1$

4. أ- برهن أنه من أجل كل عدد

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}, n \geq 2 \text{ طبيعي}$$

ب- استنتج أن المتتالية u متناقصة.

ج- بين أن المتتالية u متقاربة. نرسم بـ C إلى نهايتها.

5. v هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد

$$v_n = u_n - \frac{1}{n}, n \geq 2 \text{ طبيعي}$$

أ- بين باستعمال السؤال 4. أ- أن المتتاليتين u و v متجاورتان.

ب- استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ،

$$0 \leq u_n - C \leq \frac{1}{n}$$

معلومة : العدد الحقيقي C يسمى ثابت أولر (EULER).

مسائل

112 بكالوريا

الجزء A :

نعتبر الدالتين f و g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = e^{-x^2} \text{ و } g(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في معلم

متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر المعادلة التفاضلية: $y' + y = e^{-x}$... (E)

1. بين أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ على $u(x) = xe^{-x}$ حل للمعادلة (E)

2. حل المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$... (E₀)

3. بين أن الدالة v المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تكون حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $v - u$ حلا للمعادلة (E₀)

4. استنتج جميع حلول المعادلة (E)

5. عين الدالة f_2 حل المعادلة (E) التي تأخذ القيمة 2 من أجل 0.

الجزء B:

k عدد حقيقي معطى، نرمز بـ f_k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي: $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$

نرمز بـ $\mathcal{C}_k$ إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. عين نهايات f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. احسب f'_k من أجل كل عدد حقيقي x .

3. شكل جدول تغيرات الدالة f_k

الجزء C:

نعتبر متتالية التكاملات (I_n) المعرفة بـ $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$

ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$

1. احسب القيمة المضبوطة لـ I_0 .

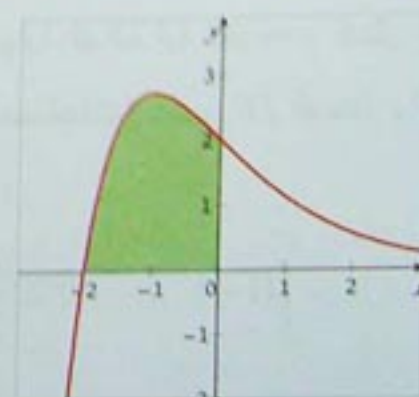
ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n$$

ج- استنتج القيم المضبوطة لـ I_1 و I_2 .

2. التمثيل البياني الموالي $\mathcal{C}_k$ هو لدالة f_k المعرفة في

الجزء B.



أ- باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل، عين قيمة k المرفقة بالمنحني $\mathcal{C}_k$.

ب- لتكن S مساحة الجزء المضلل (مقدرة بوحدة المساحات). عبر عن S بدلالة I_0 و I_1 ثم استنتج القيمة المضبوطة للمساحة S .

114 بكالوريا

نهتم في هذه المسألة بدراسة متتالية تتقارب نحو e^2 نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$$

1. احسب I_1 .

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$

$$0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!} (e^2 - 1)$$

3. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل كل عدد

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : n \geq 1 \text{ طبيعي}$$

4. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n : n \geq 1 \text{ طبيعي}$$

5. نضع، من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ $u_n = \frac{2^n}{n!}$

أ- احسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و تحقق أنه من أجل كل عدد

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n : n \geq 3 \text{ طبيعي}$$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد

$$0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} : n \geq 3 \text{ طبيعي}$$

6. استنتج نهاية المتتالية u ثم نهاية المتتالية (I_n) .

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right) : \text{بين أن}$$

115 بكالوريا

1. من أجل كل عدد حقيقي $k (k \geq 0)$ ، نعتبر الدالة f_k

$$f_k(x) = x + \frac{1 - ke^x}{1 + ke^x} \text{ المعرفة على } \mathbb{R}$$

أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي $k (k \geq 0)$ ، الدالة f_k

هي حل للمعادلة التفاضلية $2y' = (y-x)^2 + 1$ (E)

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f_k

2. نرسم C_k إلى التمثيل البياني للدالة f_k في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

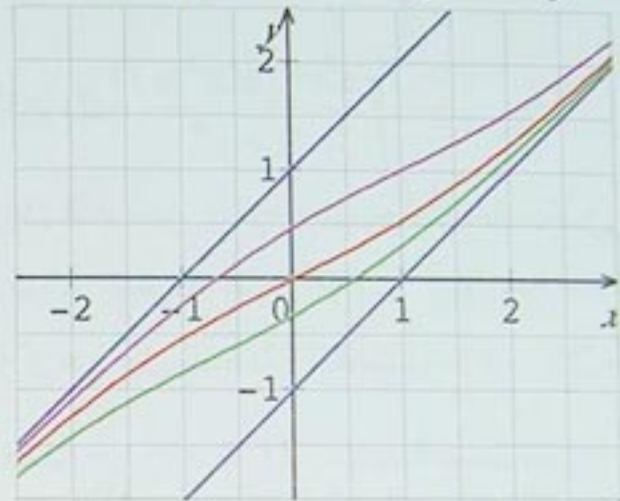
في الشكل الموالي رسمنا المستقيمين d و d' اللذين

معادلتاهما على الترتيب $y = x - 1$ و $y = x + 1$ وكذلك

عدة منحنيات C_k مرفقة لقيم خاصة لـ k .

عين العدد k المرفق للمنحنى C الذي يشمل O ، ثم العدد k

المرفق للمنحنى C' الذي يشمل النقطة $A(1;1)$.



3-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$(1) \dots f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + ke^x}$$

$$(2) \dots f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1 + ke^x} \quad \text{و}$$

ب- من أجل كل $k > 0$ ، استنتج:

- وضعية المنحنى C_k بالنسبة إلى المستقيمين d و d' .

- المستقيمات المقاربة للمنحنى C_k .

4. حالة خاصة: $k = 1$

أ- بين أن f_1 دالة فردية.

ب- لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$F(x) = \int_0^x f_1(t) dt$$

- فسر هندسيا العدد $F(x)$ في الحالتين $x > 0$ و $x < 0$.

- عين إذن شغعية الدالة مستعملا التفسير البياني.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

د- احسب $F(x)$ مستعملا الشكل الأنسب لـ $f(x)$.

116 بكالوريا

نعتبر الدوال f_n المعرفة على $[0;1]$ بـ:

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$$

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{نضع}$$

الجزء A:

1. ادرس تغيرات الدالة f_0

أنشئ المنحنى الممثل للدالة f_0 في معلم متعامد و

متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة $6cm$ محددا المماسات عند

النقطتين اللتين فاصلتهما 0 و 1 على الترتيب.

2. من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ ، نضع

$$f(x) = -f_0'(x)$$

احسب الدالة المشتقة للدالة f و بين أن f متزايدة على

المجال $[0;1]$.

استنتج أنه من أجل كل x من $[0;1]$: $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

الجزء B: في هذا الجزء لا نريد حساب I_n .

1. احسب $I_0 + I_1 + I_2$ و $I_0 + 2I_1$

2. ادرس، من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل كل عدد

حقيقي $x \in [0;1]$ ، إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

استنتج أن المتتالية (I_n) متناقصة.

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل كل

عدد حقيقي $x \in [0;1]$: $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

استنتج أن: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

عين نهاية المتتالية (I_n) .

4-أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

(f هي الدالة المعرفة في الجز 2.A)

ب- باستعمال الحصر المعطى في السؤال 2.A، بين أنه

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+2}$$

بين أن:

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ج- ابتداء من أي عدد n_0 يكون هذا الحصر يقترب

بالزيادة إلى 0,01 من I_n ؟

د- عين إذن القيمة المقربة إلى 0,01 بالزيادة لـ I_n من

أجل $n = n_0$.

اختيار من متعدد

117 اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة مع التبرير.

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

و f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f الدالة f'' معرفة بـ:

(أ) $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2} dt$

(ب) $f''(x) = \int_0^x -2xe^{-x^2} dx$

(ج) $f''(x) = -2xe^{-x^2}$

(د) $f''(x) = e^{-x^2}$

118 السؤال يتضمن 5 أجوبة ، واحد منها على الأقل صحيح، المطلوب تعيين الأجوبة الصحيحة مع التبرير
لتكن الدالة F المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

لا نريد حساب قيمة هذا التكامل

(أ) F متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

(ب) F قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$.

(ج) من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ $F(x) \leq x$

(د) من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ $F(x) \geq \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$

(هـ) $F(2) \geq \frac{2}{3}$

119 السؤال يتضمن 4 أجوبة ، واحد منها على الأقل صحيح، المطلوب تعيين الأجوبة الصحيحة مع التبرير

نعتبر متتالية لتكاملا التالية $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ حيث $n \in \mathbb{N}$

(1) $I_0 = [\ln(1+e^x)]_0^1$

(2) $I_1 = \left(\frac{1+e}{2}\right)$

(3) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}(e^n - 1)$

(4) المتتالية (I_n) متناقصة.

أصحيح أم خطأ؟

120 اذكر إن كانت النهايات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a; b]$

(أ) إذا كان $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ فإن $f \leq g$ على $[a; b]$

(ب) إذا كان $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$ فإن $f = g$ على $[a; b]$

(ج) $\int_1^2 \frac{x^2 e^x \ln(x^2+1)}{1+x^4} dx \geq 0$

121 هل الخواص التالية صحيحة أم خاطئة (برر)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x+1)e^{2x}$

(أ) الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' - 2y = e^{2x}$

(ب) المعادلة $f(x) = -\frac{1}{16}$ تقبل بالضبط حلين.

(ج) من أجل كل عدد حقيقي α ، نضع $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{-1} f(t) dt$

من أجل كل α $I(\alpha) = -\frac{1}{4e^2} - \frac{2\alpha+1}{4} e^{2\alpha}$

(د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} I(\alpha) = +\infty$

122 اذكر إن كانت كل خاصية من الخواص التالية صحيحة أم خاطئة معللا إجابتك.

لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

(أ) من أجل $x > 0$ ، $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$

(ب) دالة أصلية للدالة $g: \frac{1}{x(x+1)}$ على $[0; +\infty[$ هي

الدالة G المعرفة بـ: $G(x) = \ln \frac{x}{x+1}$

(ج) التكامل $\int_1^{\alpha} f(x) dx$ يساوي :

$2 \ln 2 - \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} + \ln \frac{\alpha}{\alpha+1}$

(د) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = 2 \ln 2 - 1$

(هـ) $\ln(1+\alpha) = \ln \left[\alpha \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right] = \ln \alpha + \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)$

نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(\alpha) = +\infty$

الكفاءات المستهدفة

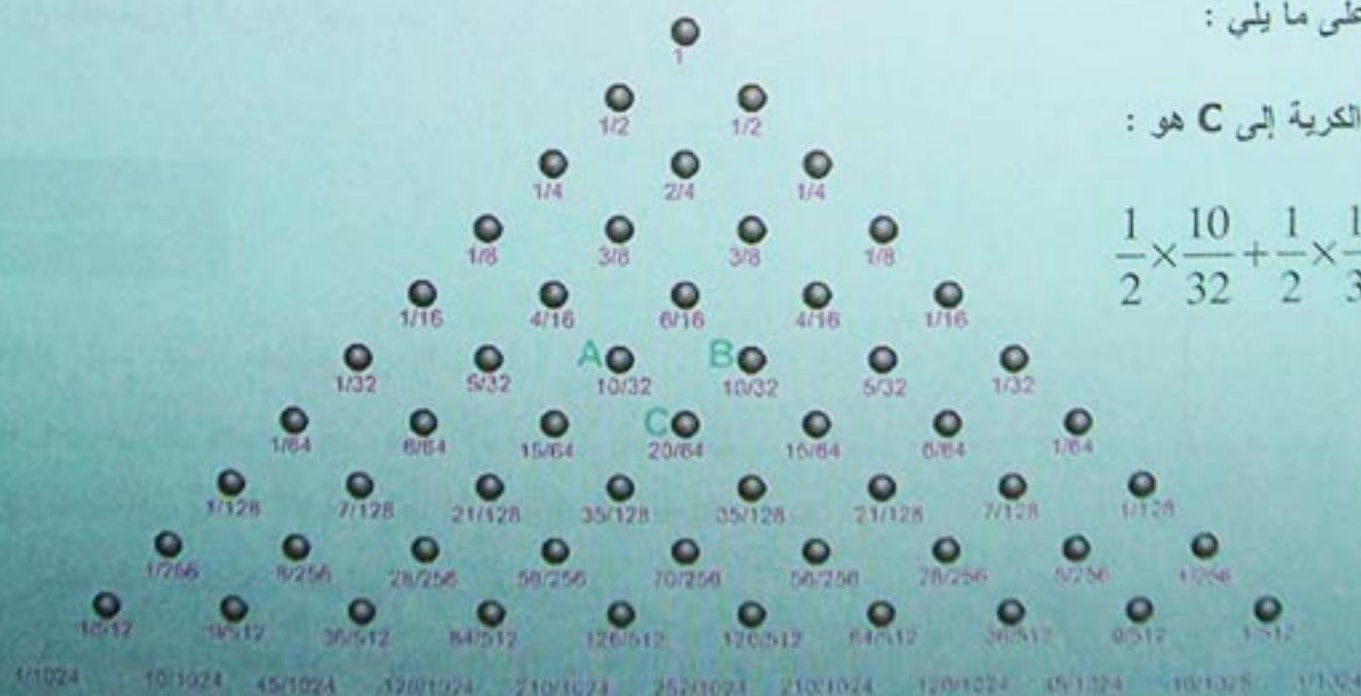
- ◆ إيجاد قانون احتمال لمتغير عشوائي .
- ◆ حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الإنحراف المعياري .
- ◆ تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- ◆ التعرف على استقلال أو ارتباط حدثتين .
- ◆ توظيف دستور الاحتمالات الكلية لحل مسائل في الاحتمالات تتعلق بالسحب من أكثر من كيس .
- ◆ نمذجة وضعيات بالاعتماد على التجارب المرجعية للسحب أو الإلقاء .

على لوحة غالتون (Galton) ، احتمال أن تصل كرية إلى نقطة ما يساوي نسبة عدد المسارات الممكنة الممرور عبرها إلى عدد المسارات الكلية . على الشكل ، في الصف السادس ، للكرية 10 حظوظ من أصل 32 حظ كي تصل إلى النقطة A و 10 حظوظ من 32 كي تصل إلى النقطة B . لاحظ أن

مجموع الاحتمالات في الصف السادس (و في كل صف) يساوي 1
 للوصول إلى النقطة C في الصف الموالي يجب على
 الكرية أن تمر بـ A أو B . في كل حالة لها حظ من
 حظين . نتحصل على ما يلي :

احتمال أن تصل الكرية إلى **C** هو :

$$\frac{1}{2} \times \frac{10}{32} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{32} = \frac{20}{64}$$



و هكذا نتحصل على كسور مقاماتها هي قوى العدد 2 و أسطنتها هي الأعداد المشكلة لمثلث باسكال و هي أيضا معاملات ثنائي الحد لنيوتن .

و باستعمال عددا كبيرا جدا من الكريات ، منحني توزيع الكريات يتشكل على هيئة جرس يعرف باسم **الغوس**

غرض و بنص قانون غوص علی: "بگذارند بطور عمده کاروان را در ساحه کوه اهری (هری) بماند و از آنجا که در آنجا

نشاط أول



- نرمي أربعة مرات متتالية قطعة نقد متوازنة .
- أكتب قائمة المخارج (16 نتيجة ممكنة)
 - ما هي الحادثة الأكبر احتمالا (A أم B) حيث
A " الحصول على وجهين و ظهرين "

نشاط ثان

يحتوي صندوق على 37 قرصة لا نميز بينها باللمس ، منها 18 قرصة حمراء . نعتبر اللعبتين التاليتين :

اللعبة الاولى

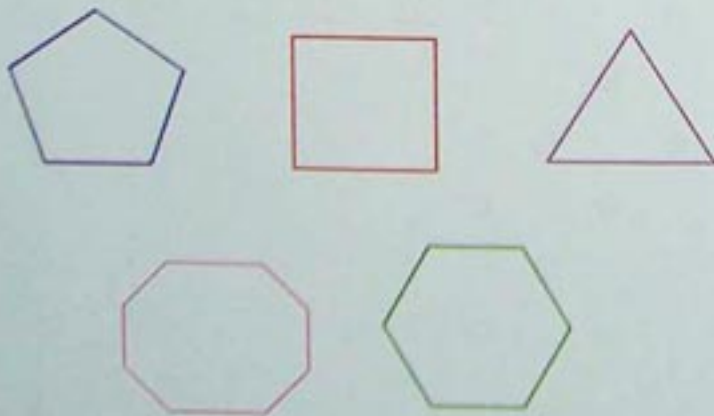
يدفع اللاعب 10 دنانير و يسحب قرصة واحدة عشوائيا . إذا كانت القرصة المسحوبة حمراء يربح 10 دنانير و إلا خسر ما دفعه .

اللعبة الثانية

يدفع اللاعب 10 دنانير و يحدد رقما قبل السحب ثم يسحب القرصة و يربح 350 دينارا إذا كان الرقم المسحوب هو المحدد سابقا إلا خسر ما دفعه .

- قارن اللعبتين (الربح المتوسط) .

نشاط ثالث



- ما هو عدد أقطار مضلع ذي n رأسا ؟
- نفرض أن كل قطرين من هذه الأقطار لا يتوازيان .
إذا كانت كل ثلاثة أقطار منها لا تشترك في نقطة واحدة .
- فما هو عدد نقط تقاطع هذه الأقطار ؟
- تحقق من النتيجة من أجل $n = 3$ ، $n = 4$ و $n = 5$

نشاط رابع

- ماهو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 إذا كانت هذه الأرقام تتكون من :
(1) 3 أرقام ؟ (2) 3 أرقام مختلفة ؟ (3) 6 أرقام مختلفة ؟

نشاط خامس

يتكون قسم من 20 تلميذا . أحمد تلميذ من هذا القسم .

- (1) نريد اختيار تلميذين من القسم ،
- أحسب a عدد الطرق الممكنة
(أي عدد اللجان ذات تلميذين و التي يمكن تشكيلها من بين تلاميذ القسم كلهم) .
- (2) نريد اختيار تلميذين شريطة أن لا يكون أحمد أحدهما .
- أحسب b عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة .
- (3) نريد اختيار تلميذين شريطة أن يكون أحمد أحدهما .
- أحسب c عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة .
- (4) حدد العلاقة بين الأعداد الطبيعية a ، b و c .

نشاط سادس

يتوزع 400 تلميذ من الأقسام النهائية في ثانوية ما الى فوجين A و B و ذلك حسب اللغة الحية التي يدرسونها (إنجليزية أو ألمانية) .

يوضح الجدول التالي هذا التوزيع بالنسبة للبنين (G) و البنات (F)

اللغة الحية	إنجليزية (A)	ألمانية (D)
G بنون	130	50
F بنات	140	80

تم اختيار تلميذ عشوائيا من بين قوائم تلاميذ السنة النهائية

- (1) أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا .

(نرسم لهذا الاحتمال بالرمز $P(F)$)

- (2) أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار يدرس اللغة الألمانية .

- (3) علما أن التلميذ المختار بنت ، ماهو احتمال أن تكون تدرس الألمانية ؟

- (4) قارن النتيجة السابقة مع $\frac{P(D \cap F)}{P(F)}$

حيث $P(D \cap F)$ هو احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا و تدرس الألمانية

٣ العدد (القوائم ، الترتيبات ، التبديلات)

1. قوائم عناصر مجموعة منتهية :

تعريف: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا ($n \geq 1$) و p عدد طبيعي ($p \geq 1$)

نسمي **قائمة** ذات p عنصرا من E كل متتالية **مرتبة** من p عنصرا من عناصر E إذا أردنا أن تكون هذه العناصر المرتبة متميزة مثلي مثلي عندئذ لا يمكن للقائمة أن تحتوي أكثر من n عنصرا و هذا ما يقتضي أن يكون $n \geq p \geq 1$

من أجل كل عدد طبيعي p ($p \geq 1$) عدد قوائم E ذات p عنصرا يساوي n^p بينما يكون عدد قوائم E ذات p عنصرا المتميزة العناصر مثلي مثلي هو $n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)$ ، هذا الجداء يحوي p عاملا .

2. التفسير

في الحالة الأولى (عدم اشتراط تمايز العناصر) يكون لكل عنصر من عناصر القائمة n إمكانية و منه فإن عدد القوائم هو $n \times n \times n \times \dots \times n$ ، (p مرة) أي n^p

في الحالة الثانية (قوائم عناصرها متميزة مثلي مثلي) يكون للعنصر الأول n إمكانية ثم $(n-1)$ إمكانية للعنصر الثاني و $(n-2)$ للعنصر الثالث ... و أخيرا $n-p+1 = n-(p-1)$ إمكانية للعنصر الأخير الذي رتبته p باستعمال مبدأ الضرب يكون عدد هذه القوائم $n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)$

ملاحظة: نسمي القائمة التي عناصرها متميزة مثلي مثلي **ترتيبية** و يرمز لعدد الترتيبات ذات p عنصرا من بين n

$$A_n^p \text{ عنصرا بالرمز } A_n^p \text{ و نكتب } A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

مثال: (1) ما عدد الأعداد ذات 3 أرقام و التي يمكن تشكيلها من الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ؟

(2) ما عدد الأعداد ذات 3 أرقام متميزة مثلي مثلي و التي يمكن تشكيلها من الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ؟

الحل: (1) كل عدد هو قائمة ذات 3 عناصر من بين الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

$$\text{عدد الأعداد هو } 5 \times 5 \times 5 = 125$$

(2) كل عدد هو ترتيبة ذات 3 عناصر متميزة من بين الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6

$$\text{عدد الأعداد هو } 6 \times 5 \times 4 = 120$$

3. تعريف

ترتيبية ذات n عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا تسمى **تبديلية** ذات n عنصرا عدد التبديلات إذن هو $1 \times 2 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$ و يرمز له بالرمز $n!$ و يقرأ مفكوك n أو (عاملي n) .

ملاحظة: يمكن كتابة عدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالشكل $\frac{n!}{(n-p)!}$

تمرين محلول 1:

- (1) ما عدد الأعداد ذات 3 أرقام مختلفة مثنى مثنى و التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9 ؟
 (2) من بين هذه الأعداد . ما عدد الأعداد الزوجية ؟ (ب) مضاعفات 5 ؟ (ج) الأصغر من 500 ؟

طريقة: مادام العناصر متمايضة (مختلفة) مثنى مثنى فالأمر إذن يتعلق بترتيبات

حل: (1) كل عدد ذي 3 أرقام متمايضة مثنى مثنى هو ترتيبية ذات 3 عناصر من بين 6 عناصر و بالتالي فعدد الأعداد هو $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

(2) (أ) من بين هذه الأعداد تكون الأعداد الزوجية هي التي رقم أحادها 2 أو 6
 - الأعداد التي رقم أحادها 2 هي ترتيبات ذات عنصرين من بين خمسة عناصر (باعتبار أن 2 ثابت ثم نرتب رقمي

العشرات و المئات) و بالتالي عددها هو $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

		6
--	--	---

أحاد عشرات مئات

		2
--	--	---

أحاد عشرات مئات

(نفس الشيء بالنسبة للأعداد التي أحادها 6)

و منه عدد الأعداد الزوجية هو $2 \times A_5^2 = 40$

(ب) عدد الأعداد المضاعفة للعدد 5 هو عدد الترتيبات ذات عنصرين من بين 5 عناصر

(رقم الأحاد 5) عدد هذه الأعداد هو $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

		5
--	--	---

أحاد عشرات مئات

(ج) الأعداد التي هي أصغر من 500 هي الأعداد التي رقم مئاتها 2 أو 3

و بالتالي فإن عددها هو $2 \times A_5^2 = 40$

3		
---	--	--

أحاد عشرات مئات

2		
---	--	--

أحاد عشرات مئات

تمرين محلول 2:

- (1) ماهو عدد القوائم ذات n عنصرا ($n \geq 1$) و التي يمكن تشكيلها من العنصر " نعم " ، " لا "
 (2) استنتج عدد أجزاء مجموعة ذات n عنصرا (n عدد طبيعي)

حل: (1) عدد القوائم هو $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$ (n مرة) أي هو 2^n

(2) ليكن A جزءا من المجموعة (من بين n عنصرا) إما ينتمي إلى الجزء A أو لا ينتمي

كل جزء من A هو قائمة ذات n عنصرا من العنصرين " ينتمي " ، " لا ينتمي " و بالتالي فإن عدد الأجزاء هو 2^n

تمرين محلول 3:

- (1) ماهو عدد الوضعيات التي يمكن أن يجلس بها 8 أشخاص حول طاولة مستديرة (من بجانب من ؟)

الحل (1)

كل وضعية هي تبديلة ذات 8 عناصر و بالتالي فعدد الوضعيات هو $8!$

1. تعريف: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا ($n \geq 1$) و p عدد طبيعي حيث ($n \geq p \geq 0$)

نسمى **توفيق** ذات p عنصرا من عناصر E كل **جزء** من E ذي p عنصرا من عناصر E

نرمز لعدد التوافقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p أو الرمز $\binom{n}{p}$

نلاحظ أن $C_n^1 = n$ أي أن عدد الأجزاء التي تحوي عنصرا واحدا من مجموعة ذات n عنصرا هو n بينما $C_n^0 = 1$ إذ لا يوجد إلا جزء واحد يحوي كل العناصر و هو المجموعة نفسها و كذلك $C_n^0 = 1$ لأن الجزء الوحيد الذي لا يحوي أي عنصر هو الجزء الخالي

2. مبرهنة: من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث ($n \geq p \geq 0$)

$$C_n^p = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

تفسير: من كل توفيق ذات p عنصرا يمكن تشكيل $P!$ ترتيبات ذات p عنصرا . لكن عدد الترتيبات ذات p عنصرا من

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ و بالتالي } \frac{n!}{(n-p)!}$$

مثال: نريد تشكيل لجنة ذات 6 تلاميذ من بين 49 تلميذا ، ما عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟

كل لجنة هي توفيق ذات 6 عناصر من بين 49 عنصر و بالتالي فإن عدد اللجان هو

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13983816$$

3. خواص: (1) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث ($n \geq p \geq 0$) لدينا $C_n^p = C_n^{n-p}$

(2) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث ($n-1 \geq p \geq 1$) لدينا $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

تفسير: (1) عدد الأجزاء التي تحوي p عنصرا هو عدد متمماتها التي تحوي $(n-p)$ عنصرا .

(2) عدد الأجزاء ذات p عنصر التي تحوي العنصر a هو C_{n-1}^{p-1}

و عدد الأجزاء ذات p عنصرا و التي

لا تحوي العنصر a هو C_{n-1}^p و بالتالي فعدد الأجزاء

ذات p عنصرا هو $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ و هو C_n^p .

ملاحظة: تمكننا الخاصية الثانية من حساب C_n^p

إذا علمنا C_{n-1}^p و C_{n-1}^{p-1} كما هو مبين في الشكل

p \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

4. دستور ثنائي الحد: A و b عددين طبيعيين ، n عدد طبيعي ($n \geq 1$) لدينا

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

يعطى البرهان في التمرين (29)

تمرين محلول 1:

- (1) باستعمال الحاسبة ، أحسب $9!$ ، $15!$ ، $37!$
(2) باستعمال الحاسبة ، أحسب C_{12}^3 ، C_{16}^5 ، C_{16}^{11}

حل:

(1) باستعمال الحاسبة Ti83 مثلاً أدخل أولاً العدد 9 ثم اضغط على **Math** **PRB** ثم اختر الدالة "عاطلي" **4:!** ثم الموافقة بـ **ENTER** تظهر النتيجة $9!$ و بنفس الطريقة نجد

$$37! = 1.376375309E43 \quad 15! = 1.307674368E12$$

(2) لحساب C_{12}^3 ندخل العدد 12 ثم نضغط على **Math** **PRB** و نختار الدالة **3:nCr** ثم ندخل العدد 3 ثم الموافقة بـ **ENTER** تظهر النتيجة و بنفس الكيفية نحصل على

$$12 \text{ nCr } 3 = 220 \quad 16 \text{ nCr } 5 = 4368$$

"الخاصية (1)" $C_{16}^{11} = C_{16}^5$ و

تمرين محلول 2 :

- يحتوي صندوق على 5 كريات سوداء و 4 كريات بيضاء ، كل الكريات متشابهة لا نميز بينها باللمس . نسحب في آن واحد 3 كريات
(1) ماعدد السحبات الممكنة ؟ (2) ماعدد السحبات الممكنة التي تحوي كرية سوداء على الأقل ؟

حل:

- (1) كل سحبة هي توفيق ذات 3 عناصر من 9 عناصر و بالتالي ، عدد السحبات هو $C_9^3 = 84$
(2) يمكن أن نحسب عدد السحبات التي لا تحوي أي كرية سوداء (أي لا تحوي سوى الكريات البيضاء) و هو عدد التوفيق ذات 3 عناصر من 4 أي $C_4^3 = 4$
ثم نستنتج عدد السحبات التي تحوي كرية سوداء على الأقل و هو $84 - 4 = 80$

تمرين محلول 3 :

$$A = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{2^k} \quad B = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k} \quad \text{أحسب المجموعين :}$$

حل: باستعمال منشور ثنائي الحد نلاحظ أن

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad B = \left(3 + \frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{13}{4}\right)^n$$

نمذجة تجربة عشوائية :

عندما يكون عدد مخارج تجربة عشوائية منتهيا ، نعرف على مجموعة المخارج $E = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ ، فانون احتمال و ذلك باعطاء متتالية أعداد $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ تحقق $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ و $p_i \geq 0$ من أجل كل i ($r \geq i \geq 1$)

مثال : يحتوي صندوق 6 كريات (ثلاثة منها تحمل الرقم 1 و كرتان تحملان الرقم 2 و كرية تحمل الرقم 3) الكريات لا نميز بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كرية واحدة هناك عدة اختيارات ممكنة للأعداد p_i تحقق الشروط السابقة ، لكن النموذج المختار لا يكون مناسباً إلا في حالة اقتراب التكرارات الإحصائية من الأعداد p_i عندما يكون عدد التجارب أكبر

المخرج x_i	1	2	3
الاحتمال p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

إن الحدس يقودنا إلى النموذج التالي

في حالة تساوي الأعداد p_i نقول أن قانون

الاحتمال متساوي التوزيع (أو نقول تساوي الاحتمال)

أي (من أجل كل i لدينا $p(x_i) = p_i = \frac{1}{r}$)

نذكر أن أمل قانون الاحتمال هو العدد $\mu = \sum_{i=1}^r p_i x_i$ ، تباينه العدد $V = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - \mu)^2$ و انحرافه المعياري

هو العدد $\sigma = \sqrt{V}$

و نذكر أن الحادثة هي كل جزء من E و أن $\{x_i\}$ تدعى حادثة أولية ، E الحادثة الأكيدة و ϕ هي الحادثة المستحيلة

احتمال حادثة A هو مجموع احتمالات كل المخارج التي تنتمي إلى A ($p(\phi) = 0$) و في حالة تساوي احتمال ينول حساب احتمال A أي $p(A)$ الى مسألة عد .

مبرهنة :

في حالة تساوي احتمال على E يكون لدينا من أجل كل حادثة A

$$p(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$$

أخيرا نذكر ببعض الخواص

الخاصية	لغة الحوادث	أجزاء E
$1 \geq p(A) \geq 0$	A حادثة كيفية	A
$p(\phi) = 0$	الحدثان الأكيدة و المستحيلة	ϕ ، E
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$	A ، B غير متلائمتين	$A \cap B = \phi$
$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$	$\bar{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A	$\bar{A}$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$	A و B كيفيتان	B ، A

تمرين محلول:

نفرض أنه في مدينة ما ، إجمالي ميلاد ذكر أو أنثى متساويان نختار عشوائيا عائلة

ذات 5 أطفال ، أحسب احتمال :

1. من بين الأطفال الخمسة يوجد 4 ذكور على الأقل
2. عدد الإناث أكبر من عدد الذكور
3. ثلاثة أطفال على الأقل متتابعون من نفس الجنس

حل:

اختار خمسة أطفال يعني تشكيل قائمة ذات 5 عناصر من العنصرين F و G ، F " أنثى " G " ذكر " مثلا : FGFGG هو اختيار عدد الاختيارات الممكنة هو عدد القوائم أي $2^5 = 32$

(1) لتكن الحادثة A " يوجد 4 ذكور على الأقل "

نسمي A_1 " يوجد 4 ذكور " و A_2 " يوجد 5 ذكور "

$$p(A_1) = \frac{C_5^4}{2^5} \quad \text{و} \quad p(A_2) = \frac{C_5^5}{2^5} \quad \text{إذن}$$

$$A = A_1 \cup A_2 \quad \text{و بالتالي} \quad p(A) = p(A_1) + p(A_2)$$

$$= \frac{3}{16}$$

$$A_2 = \{GGGGG\} \quad A_1 = \{GGGGF, GGGFG, GGFGG, GFGGG, FGGGG\}$$

(2) نسمي الحادثة B " عدد الإناث أكبر من عدد الذكور "

نسمي B_1 " يوجد 5 إناث " و B_2 " يوجد 4 إناث " و B_3 " يوجد 3 إناث "

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \quad \text{إذن} \quad p(B) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_3)$$

$$= \frac{1 + C_5^4 + C_5^3}{2^5} = \frac{1}{2}$$

(3) نسمي الحادثة C " ثلاثة أطفال على الأقل من نفس الجنس متتابعون "

و اعتبرنا الإناث مثلا يكون لدينا $\{FFF, GFF, FGF, FGG, GGG, FGG, GFG, GGF, FFF, FFF, FFF, FFF, FFF, FFF, FFF, FFF\}$

نفس الشيء بالنسبة للذكور و بالتالي

$$p(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

المتغير العشوائي ، الأمل الرياضي و التباين لمتغير عشوائي

متغير عشوائي X هو دالة عددية معرفة على مجموعة المخارج E و مزودة باحتمال P
 X يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ بالاحتمالات $p_1, p_2, \dots, p_n$ معرف كما يلي $p_i = p(X = x_i)$
 إرفاق القيم p_i بالقيم x_i هو تعريف قانون احتمال جديد على E' هذا القانون يرمز له بـ P' أو P_x و يسمى
 قانون X .
 الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو الأمل الرياضي لقانون احتمال P_x و كذلك التباين و الانحراف المعياري
 ونرمز لها على الترتيب بالرموز $E(X)$ ، $Var(X)$ ، $\sigma(X)$

خواص الأمل الرياضي و التباين لمتغير عشوائي :

$E(X)$ هو معدل القيم x_i مرفقة بالقيم p_i بالمقارنة مع مجال الاحصاء $E(X)$ هو $\bar{x}$ و في ميدان الألعاب هو
 الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة ، فانعدام $E(X)$ يدل على أن اللعبة عادلة
 و $E(x) > 0$ يعني أن اللعبة مربحة و في حالة $E(X) < 0$ فهي ليست في مصلحة اللاعب كما في مجال
 الاحصاء فإن التباين و الانحراف المعياري مقياس تشتت .
 يمكن أن نبرهن بسهولة مايلي :

مبرهنة :

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعية و a عدد حقيقي
 لدينا $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ و $E(aX) = aE(X)$
 حيث $E(X + Y)$ و $E(aX)$ هما الأملان الرياضيائين لكل من $X + Y$ و aX

ينتج من المبرهنة السابقة الخواص التالية :

X متغير عشوائي و a ، b عددا حقيقيان ، لدينا

$$E(X + b) = E(X) + b$$

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\sigma(aX) = |a| \sigma(X) \text{ و } Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$\sigma(X + b) = \sigma(X) \text{ و } Var(X + b) = Var(X)$$

ملاحظة برهان ما سبق ينتج مباشرة من التعريف (بحسابات بسيطة نتحقق من المساويات في المبرهنة والخواص)

تمرين محلول 1:

صندوق يحوي كرتين لا تميز بينهما في اللمس ، إحداهما بيضاء و الأخرى سوداء . نسحب 3 مرات و بالإرجاع كرية واحدة . نرسم للكرية البيضاء بالرمز B و للكرية السوداء بالرمز N

مجموعة المخارج هي $E = \{BBB, BBN, BNB, NBB, BNN, NBN, NNB, NNN\}$

إذا كان سحب الكرية البيضاء يؤدي إلى ربح 20 ديناراً و سحب الكرية السوداء يؤدي إلى خسارة 10 دنانير

فإن الدالة $X: E \rightarrow \mathbb{R}$ التي ترفق بكل مخرج الربح المناسب تأخذ القيم : -30 ، 0 ، 30 ، 60

و لكل قيمة لـ X (مثل 30) يمكن اعتبار الحادثة $(X = 30) = \{BBN, BNB, NBB\}$ التي احتمالها $\left(\frac{3}{8}\right)$

حل نحصل على قانون احتمال جديد على المجموعة $E' = X(E)$ نسميه قانون المتغير X

الربح x_i	-30	0	30	60
الاحتمال $p_i = p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الأمثل الرياضيائي لـ X

$$E(X) = -30 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + 30 \times \frac{3}{8} + 60 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{120}{8} = 15$$

التباين هو

$$Var(X) = \frac{1}{8}(-30-15)^2 + \frac{3}{8}(0-15)^2 + \frac{3}{8}(30-15)^2 + \frac{1}{8}(60-15)^2$$

$$= \frac{5400}{8} = 675$$

و يمكن حساب $Var(X)$ بالقانون $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

الانحراف المعياري هو

$$= \sqrt{675} \approx 25,98$$

تمرين محلول 2:



نرمي 3 أحجار نرد مكعبة غير مزورة مرقمة من 1 إلى 6 و نسجل مجموع الأرقام الظاهرة على الأوجه العلوية في كل رمية .
- ما هو معدل المجاميع الممكنة ؟

حل: لتكن X ، Y و Z المتغيرات العشوائية التي تأخذ كقيم الأرقام المحصل عليها على الأحجار الثلاثة

و بالتالي يكون $T = X + Y + Z$ هو المجموع المحصل عليه

$$E(X) = E(Y) = E(Z) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5 \quad \text{و} \quad E(T) = E(X) + E(Y) + E(Z)$$

نحصل على $E(T) = 10,5$

للإحتمالات الشرطية :

1. تعريف

لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $p(A) \neq 0$. نعرف على E احتمالا جديدا يرمز له بالرمز p_A

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ حيث من أجل كل حادثة B نكتب}$$

p_A يسمى الاحتمال الشرطي علما أن A محققة

$$p_A(B) = p(B/A) \text{ و نقرأ "إحتمال B علما أن A محققة"}$$

مثال:

صندوق يحوي 5 قريصات مرقمة بالأرقام 0، 2، 4، 6، 8 و 3 قريصات مرقمة بالأرقام 1، 3، 5

لا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا على التوالي و دون ارجاع قريصتين من الصندوق

- ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين ؟

الحل:

نسمي A الحادثة " القريصة المسحوبة الأولى تحمل رقما زوجيا " و B الحادثة " القريصة الثانية تحمل رقما فرديا "

$$p(A) = \frac{5}{8} \text{ و نريد حساب } p(A \cap B) \text{ أي } p(A) \times p(B/A)$$

لكن $p(B/A)$ هو احتمال سحب رقما زوجيا من الصندوق الذي لا يحوي إلا أربعة أرقام زوجية من بين 7 أرقام

$$\text{أي } p(B/A) = \frac{4}{7}$$

$$\text{و بالتالي } p(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

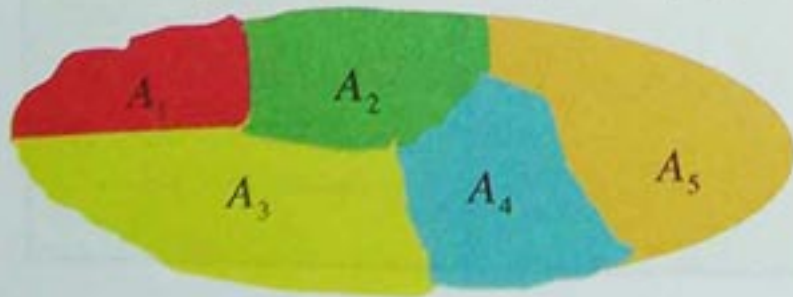
2. دستور الاحتمالات الكلية :

1.2. تجزئة مجموعة : نسمي تجزئة مجموعة أجزاء لهذه المجموعة كلها ليست خالية منفصلة مثلى مثلى (لا يوجد

جزءان لهما عنصر مشترك) و اتحادهما المجموعة الكلية

$$(1) A_i \neq \emptyset \quad (2) A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$(3) A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = E$$



2.2. لتكن A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 حوادث احتمالاتها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة E .

لدينا من أجل كل حادثة B

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

$$\text{مع } p(A_k \cap B) = p(A_k) \times p_{A_k}(B) \text{ من أجل كل } k \text{ حيث } 1 \leq k \leq n$$

لاحظ أن العائلة $\{A_k \cap B; 1 \leq k \leq n\}$ تشكل تجزئة للحادثة B .

تمرين محلول 1: يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نميز بينها عند اللمس .
نسحب كرتين على التوالي و دون إرجاع .
لتكن الحادثة A " الكرة المسحوبة الأولى حمراء " و b الحادثة " الكرة المسحوبة الثانية خضراء "
أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ثم استنتج $p(A \cap B)$

حل:

الكرات لا نميز بينها عند اللمس (حالة تساوي احتمال) و بالتالي $p(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

إذا تحققت الحادثة A تصبح الوضعية في الصندوق كالتالي : 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء

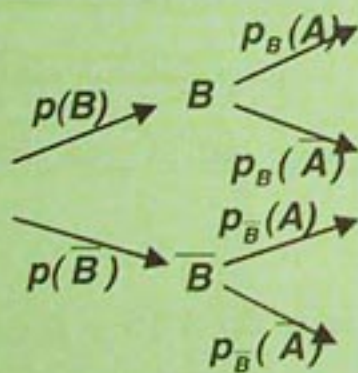
ومنه $p_A(B) = \frac{3}{8}$ و بالتالي $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

تمرين محلول 2: حساب الإحتمالات الشرطية باستعمال الشجرة (العنكبوتية)

نعتبر صندوقين أحدهما U_1 يحوي 5 كرات خضراء و 3 كرات حمراء و الآخر U_2 يحوي 3 كرات خضراء و 6 كرات حمراء . كل الكرات لا نميز بينها باللمس .

ترمي حجر نرد مكعب غير مزور ، مرقم من 1 الى 6 . إذا حصلنا على أحد الرقمين 5 أو 6 نسحب كرة عشوائية من الصندوق U_1 و في الحالات الأخرى نسحب كرة من الصندوق U_2

نسمي A الحادثة " الكرة المسحوبة خضراء " و نسمي الحادثة B " نحصل على أحد الرقمين 5 أو 6 "



(1) أحسب $p(B)$ و $p(\bar{B})$

(2) أحسب $p_B(A)$ و استنتج $p_B(\bar{A})$

(3) أحسب $p_{\bar{B}}(A)$ و استنتج $p_{\bar{B}}(\bar{A})$

(4) أكمل الشجرة بالقيم العددية المحصل عليها

(5) استنتج $p(A)$

حل:

(1) النرد غير مزور (حالة تساوي احتمال) ومنه $p(B) = \frac{1}{3}$; $p(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

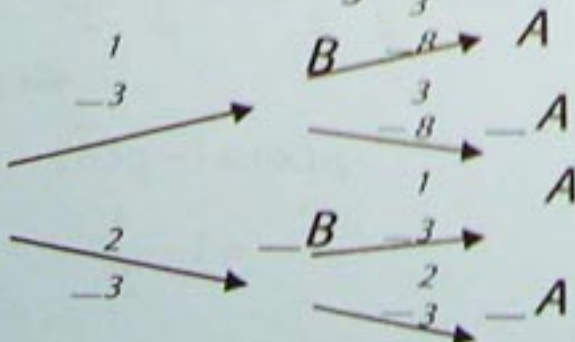
(2) إذا تحققت B فإن السحب يتم من الصندوق U_1 و في هذه الحالة احتمال الحصول على كرة خضراء هو $\frac{5}{8}$

(لأننا في حالة تساوي احتمال) أي $p_B(A) = \frac{5}{8}$ و بالتالي $p_B(\bar{A}) = \frac{3}{8}$

(3) إذا تحققت $\bar{B}$ يتم السحب من الصندوق U_2 و منه $p_{\bar{B}}(A) = \frac{1}{3}$ و بالتالي $p_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{2}{3}$

(4) $p(A) = p(B) \times p_B(A) + p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(A)$

$$p(A) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{8} + \frac{2}{3} \right) = \frac{31}{72}$$



الحوادث المستقلة و المتغيرات العشوائية المستقلة

1. تعريف

نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتان إذا و فقط إذا كان

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

إذا كان $p(A) \neq 0$ فإن $p(B/A) = p(B)$

2. تعريف

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء E .

لتكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ قيم المتغير X و $y_1, y_2, \dots, y_m$ قيم المتغير Y

نقول أن X و Y مستقلان عندما تكون الحادثتان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلتان من أجل كل i و j

حيث $(1 \leq i \leq n \text{ و } 1 \leq j \leq m)$

◀ في حالة استقلال الحوادث يكون احتمال قائمة النتائج هو جداء احتمالات كل النتائج (يحصل هذا عموما في التجارب العشوائية المكررة) .

◀ متغيران عشوائيان مرتبطان بتجربتين مختلفتين مستقلان .

مثال :

نرمي n مرة (n عدد طبيعي أكبر من 1) حجر نرد مكعب غير مزور أوجهه مرقمة من 1 الى 6

- ماهو احتمال الحادثة A حيث A " نحصل مرة واحدة على الأقل رقم فردي "

حل :

◀ لو فكرنا في الإجابة المباشرة (الحصول على رقم فردي واحد فقط أو رقمين فرديين فقط أو أو كل الأرقام فردية)

فإن الحساب سيكون طويلا و معقدا نوعا ما ، وعليه نفضل استعمال الخاصية التي تنص على ما يلي .

" مجموع احتمالي حادثتين متعاكستين يساوي 1 "

$\bar{A}$ هي الحادثة " لا نحصل إلا على الأرقام الزوجية "

$$p(\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

ومنه

$$p(A) = 1 - p(\bar{A})$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

تمرين محلول 1:

(1) A و B حادثان مستقلتان . بين أن

(أ) A و $\bar{B}$ مستقلتان (ب) $\bar{A}$ و B مستقلتان (ج) $\bar{A}$ و $\bar{B}$ مستقلتان

(2) يرمي قاذفان T و S في نفس الوقت هدفا معينا . الحادثان A " S يصيب الهدف " ، B " T يصيب الهدف "

مستقلتان و احتمالا هما $p_s = \frac{4}{5}$ و $p_T = \frac{7}{8}$ على الترتيب

- أحسب احتمال الحوادث التالية :

(أ) S و T يصيبان الهدف (ب) S فقط بصيب الهدف (ج) الهدف لم يصب (د) الهدف يصاب

(هـ) قاذف واحد يصيب الهدف

حل:

(1) (أ) لدينا $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$ لأن $A \cap \bar{B} = A - A \cap B$ و منه $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A) \times p(B)$ و بالتالي $p(A \cap \bar{B}) = p(A)[1 - p(B)]$ أي $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B})$ (ب) بنفس الطريقة نجد $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p(B)$ (ج) لدينا $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)]$ أي $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A) - p(B) + p(A) \times p(B)$ $= (1 - p(A))(1 - p(B)) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B})$ (2) (أ) $p = p_s \times p_T = \frac{7}{10}$ (ب) $p = p_s(1 - p_T) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$ (ج) $p = (1 - p_s)(1 - p_T) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40}$ (د) $p = p_s + p_T - p_s \times p_T = \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{7}{10} = \frac{37}{40}$ (هـ) $p = p_s(1 - p_s) + p_T(1 - p_T) = \frac{11}{40}$

تمرين محلول 2:

نرمي ثلاث مرات قطعة نقود متوازنة

نرمز بـ X_1 لعدد مرات ظهور " وجه " في الرمية الأولى (X_1 يأخذ القيمتين 0 أو 1)و نرمز بالرمز X_2 لعدد مرات ظهور " وجه " في الرميتين الثانية و الثالثة .- تحقق أن X_1 و X_2 هما متغيران عشوائيان مستقلان

حل:

X_2	0	1	2
$p(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_1	0	1
$p(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

واضح أن قانوني احتمال X_1 و X_2 همايمكن أن نتحقق بسهولة أن $(X_1 = x_i)$ و $(X_2 = x_j)$ مستقلان من أجل $0 \leq i \leq 1$ و $0 \leq j \leq 2$ مثلا $p(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ لأن $E_1 = \{P; F\}$ و $p(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{8}$ لأن المخارج هي $E = \{FFF; FFP; FPF; PFF; PPF; PFP; FPP; PPP\}$ مع F يرمز للوجه و P يرمز للظهر

① تواريخ الميلاد : (استعمال نماذج مرجعية)

عدد تلاميذ قسم ما 34 تلميذا . هل من المعقول الرّهان على أن تلميذين على الأقل لهما نفس تاريخ الميلاد ؟

① **النمذجة :** نفرض أن عدد أيام كل سنة هو 365 يوما و أن مواليد التلاميذ متساوية الاحتمال على مدار أيام السنوات يمكن نمذجة تواريخ ميلاد التلاميذ بـ 34 سحبة عشوائية على التوالي و بالإرجاع لكروية واحدة من صندوق يحوي 365 كروية مرقمة من 1 إلى 365 . (الكريات لا تميز بينها باللمس)

② **الحساب :** الحادثة الملائمة هي A مجموعة القوائم ذات 34 عنصرا و التي تشمل على الأقل عنصرين متساويين من العناصر 1 إلى 365 .

(أ) نضع p_n احتمال الحادثة A في قسم عدد تلاميذه n (n عدد طبيعي أكبر من 2)

املا الجدول التالي

N	15	20	23	30	50	57
p_n						

ماذا تلاحظ ؟ فسر .

تطبيق : لإعداد مجوهرات ، يضع صائغ 3 حبات من اللؤلؤ داخل وعاء و يمزجها بذهب مذاب ثم يضعها في قوالب للحصول على ثلاث قطع .

(1) أثبت أن احتمال أن كل قطعة تحوي حبة لؤلؤ على الأقل هو 0,75 .

(2) ما عدد حبات اللؤلؤ التي يجب وضعها داخل الوعاء حتى يكون الإحتمال السابق أكبر من 0,99 ؟

② استعمال شجرة الاحتمالات

نعتبر صندوقين أحدهما U_1 يحوي 6 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و الآخر U_2 يحوي 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء . كل الكرات لا تميز بينها باللمس .

نأخذ صندوقا عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا . إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ما احتمال أن تكون قد سُحبت من الصندوق U_1 ؟

① **النمذجة و الترميز :** نضع U_i الحادثة " الصندوق المختار هو U_i " حيث $i \in \{1; 2\}$

نضع B الحادثة " الكرة المسحوبة بيضاء " و N الحادثة " الكرة المسحوبة سوداء "

- نريد حساب $p(U_i/B)$ و هو ما يقتضي حساب $p(B)$ و $p(U_i \cap B)$

② **الحساب :** املا الشجرة بقم الاحتمالات

احسب $p(B)$

استنتج $p(U_i \cap B)$

تطبيق : اختبارات الكشف عن مرض ما تتم كما يلي :

احتمال أن يكون لشخص مريض اختبار موجب هو 0,99 .

احتمال أن يكون لشخص سليم اختبار سالب هو 0,99 .

لتكن p نسبة المرض في مجتمع ما . أحسب بدلالة p احتمال أن يكون شخص مريضا إذا كان اختباراه موجبا .

3 الإحتمالات في علم الوراثة (قانون هاردي و نبرج 1908)

حينما يكون لمورث شكلان A و a يمكن أن يكون للفرد ثلاثة أنماط وراثية : AA ، Aa أو aa .
نعتبر الجيل الأول الذي تكون فيه نسب هذه الأنماط الوراثية p_0 ، q_0 و r_0 على الترتيب .
نقبل أن الأزواج تتشكل عشوائيا و أن الأنماط الوراثية المعتبرة عشوائية .

(1) عبر بدلالة p_0 ، q_0 و r_0 عن الإحتمال p_1 لكي يكون لطفل من الجيل الثاني النمط AA وعن إحتمالي q_1 و r_1 لكي يكون له النمط Aa أو aa .

(2) أثبت أن p_1 ، q_1 و r_1 تكتب بدلالة $\alpha = p_0 - r_0$ فقط و استنتج p_2 ، q_2 و r_2 (نفس النسب بالنسبة للجيل الثالث) . التعليق ؟

توضيحات :

النمط الوراثي	AA	Aa
الإحتمال	0,5	0,5

إذا كنت الأنماط الوراثية للوالدين AA و Aa فإن قانون النمط الوراثي للولد هو

AA	Aa	aa
0,25	0,5	0,25

إذا كنت الأنماط الوراثية للوالدين Aa و Aa فإن قانون النمط الوراثي للولد هو

4 المفاتيح USB

تغطي النتائج مدورة إلى 10^{-3} . مصنع أجهزة الحواسيب (الإعلام الآلي) ينتج مفاتيح USB حيث 4 % من المفاتيح غير صالحة . تصنف المفاتيح بعد فرزها إلى ثلاث مجموعات



- ◀ مفاتيح تحمل ختم المصنع
- ◀ مفاتيح لا تحمل ختم المصنع
- ◀ مفاتيح للإتلاف

(1) وحدة الفرز ترفض 3 % من المفاتيح الصالحة بالخطأ و ترفض 95 % من المفاتيح غير الصالحة .

(أ) ماهو الاحتمال p_1 حتى تقبل وحدة الفرز مفتاحا غير صالح .

• ماهو الاحتمال p_2 حتى ترفض وحدة الفرز مفتاحا صالحا .

• ماهو الاحتمال p_3 حتى يحدث خطأ في الفرز .

(ب) تحقق أن p_4 احتمال قبول مفتاح USB يساوي 0,933

(2) يتم الفرز في خمس مراحل متتابعة . يوضع ختم المصنع على المفتاح إذا تم قبوله في المراحل الخمسة كلها و يتلف إذا رفض على الأقل في مرحلتين و إلا يقبل المفتاح لكن دون ختم . أحسب الإحتمالات التالية :

- ◀ p_5 احتمال قبول المفتاح دون ختم
- ◀ p_6 احتمال قبول المفتاح و ختمه
- ◀ p_7 احتمال إتلاف المفتاح

[يعتبر الفرع الثاني مقدمة للفصل الموالي و تمهيدا لقانون برنولي]

موضوع محلول

لصيانة أجهزة التدفئة تراقب شركة عن بعد خلال فصل الصيف الأجهزة .
نعلم أن 20% من الأجهزة هي تحت الضمان . من بين الأجهزة التي تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية أحدها $\frac{1}{100}$ ، و من بين الأجهزة التي ليست تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية أحدها $\frac{1}{10}$.

نسمي G الحادثة " المدفئة تحت الضمان "

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " المدفئة تحت الضمان و هي غير صالحة " ، B " المدفئة غير صالحة "

(2) في سكن ما المدفئة غير صالحة . بين أن احتمال أنها تحت الضمان هو $\frac{1}{41}$

(3) المراقبة مجانية إذا كانت المدفئة تحت الضمان ، و يقدر ثمن المراقبة بـ 800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي صالحة بينما يقدر بـ 2800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي صالحة .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة ثمن تكلفة مراقبة مدفئة . عين قانون احتمال X و أمله الرياضي .

تعاليق

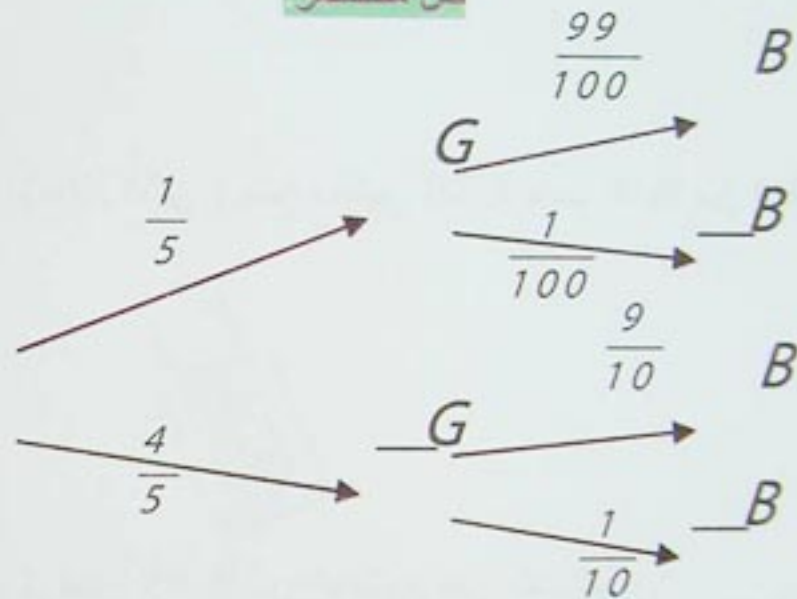
كلما وجدت تفريعات نبادر إلى تكوين الشجرة المناسبة .

لحساب احتمال حادثة ما

- نتتبع المسارات المؤدية إليها عبر فروع الشجرة .
- احتمال الحادثة هو جداء الاحتمالات الموجودة على أسهم المسارات المناسبة

لاحظ أن مجموع الاحتمالات هو 1

حل مختصر



$$P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{500} \quad (1)$$

$$P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{100} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{41}{500}$$

$$P_B(G) = \frac{P(G \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1}{41} \quad (2)$$

(3)

$$E(X) = 800 \times \frac{18}{25} + 2800 \times \frac{2}{25} = 800DA$$

(I) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي : $U_1 = \frac{1}{2}$ و العلاقة التراجعية $U_{n+1} = \frac{1}{6}U_n + \frac{1}{3}$.

لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل $n \geq 1$ كما يلي $V_n = U_n - \frac{2}{5}$

- تحقق أن المتتالية (V_n) هي هندسية يطلب تحديد أساسها . أكتب U_n بدلالة n

(II) نعتبر حجر نرد A و B حيث A يحوي 3 أوجه حمراء و 3 أوجه بيضاء بينما يحوي B ، 4 أوجه حمراء و وجهين أبيضين . نأخذ عشوائيا أحد الحجرين و نرميه ، إذا حصلنا على وجه أحمر نحتفظ بنفس الحجر و إذا حصلنا على وجه أبيض نغير الحجر و نرمي مرة ثانية و هكذا ...

نسمي A_n الحادثة " نستعمل الحجر A في الرمية n " و $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية لها كما نسمي R_n الحادثة " نستعمل الحجر R في الرمية n " و $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية لها و نرمز بالرمزين a_n ، r_n لاحتمالي الحادتين A_n و R_n على الترتيب .

(1) عين a_1

(2) عين r_1 (يمكن استعمال شجرة الاحتمالات)

(3) بملاحظة أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $R_n = (A_n \cap R_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$ و بين أن $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$

(4) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$

(5) استنتج أجل كل $n \geq 1$ يكون $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ ثم أكتب a_n بدلالة n

(6) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$

توجيهات

(I) متى نقول عن متتالية أنها هندسية ؟ .

(II) (2) يمكن استعمال شجرة الاحتمالات

(3) بملاحظة أن : $(R_n \cap A_n)$ و $(R_n \cap \overline{A_n})$ غير متلائمتين

و أن $p(R_n \cap A_n) = p(A_n) \times p_{A_n}(R_n)$

و أن $p(R_n \cap \overline{A_n}) = p(\overline{A_n}) \times p_{\overline{A_n}}(R_n)$

(5) في الرمية $n+1$ نرمي A . يعني أن الرمية n ، رمينا A

و حصلنا على وجه أحمر أو رمينا B و حصلنا على وجه أبيض

1 يحوي صندوق 32 كرية (لا نفرق بينها عند اللمس)
نسحب 8 كريات عشوائيا.

(1) إذا تم السحب في آن واحد . ما عدد الحالات الممكنة ؟
(2) (ا) إذا تم السحب على التوالي دون إرجاع . ما عدد الحالات الممكنة ؟

(2) (ب) إذا تم السحب على التوالي مع الإرجاع . ما عدد الحالات الممكنة ؟

2 أحسب المجاميع التالية

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \quad B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{3^{n-k}}{4^k}$$

3 نعتبر الصندوقين A و B .

* الصندوق A يضم 3 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء و 5 كرات خضراء .

* الصندوق B يضم 7 كرات حمراء ، كرتين خضراوين و 4 كرات سوداء .

جميع الكرات متشابهة و لا نستطيع التفريق بينها باللمس
نسحب كرة من الصندوق A ثم كرة من الصندوق B .

1- لتكن V حادثة " سحب كرة خضراء من الصندوق A "
- أحسب $p(V)$

2- نعتبر الحوادث التالية :

N " سحب كرة سوداء من الصندوق B "

R " سحب كرة حمراء من الصندوق B "

V " سحب كرة خضراء من الصندوق B "

- أحسب $p(V)$ ، $p(R)$ ، $p(N)$

3- نسحب كرة من الصندوق A و نتركها جانبا ثم نسحب كرة من الصندوق B .

- أحسب احتمال الحادثة " سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B "

4 يشارك رشيد في لعبة حظ حيث احتمال الفشل فيها

0,6 . قرر رشيد المحاولة 5 مرات متتالية (نعتبر أن

المحاولات مستقلة عن بعضها البعض) . نعتبر X المتغير

العشوائي الذي يرفق كل 5 محاولات بعدد مرات الفوز .

1. عرف قانون الاحتمال للمتغير X

2. أوجد الأمل الرياضي و الانحراف المعياري لـ X

3. ما هو احتمال الحادثتين :

A " دوما يفشل في المحاولات الخمسة "

B " يفوز مرة واحدة على الأقل في المحاولات الخمسة "

5 يضم صندوق 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

لتكن الحادثة A " الكرة الأولى حمراء " و الحادثة B

الكرة الثانية خضراء "

- أحسب $P(A)$ ، $P_A(B)$ ثم استنتج $P(A \cap B)$

6 نعتبر صندوقين ، يضم الأول 4 كرات بيضاء و 3

كرات سوداء و يضم الثاني كرتين بيضاوين و 5 كرات

سوداء . الكرات كلها متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس .

نرمي قطعة نقود مرة واحدة ، فإذا ظهر الوجه نسحب

عشوائيا كرة من الصندوق الأول ، أما إذا ظهر الظهر على

قطعة النقود نسحب كرة من الصندوق الثاني .

لتكن F الحادثة " ظهور الوجه " و B الحادثة " الكرة

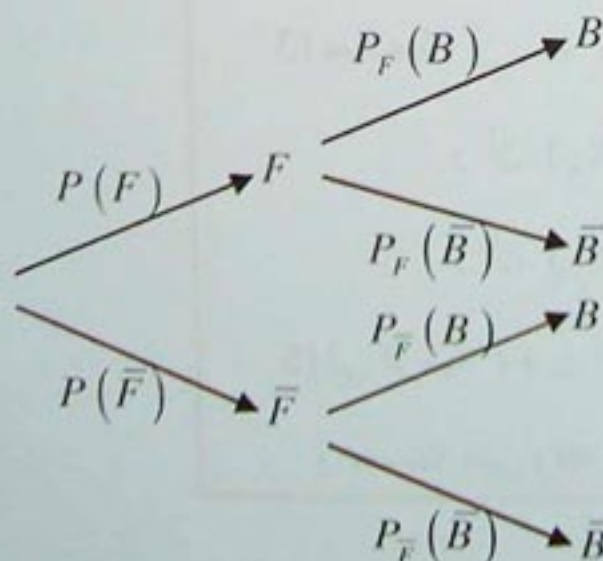
المسحوبة بيضاء "

1- أحسب $P(F)$ و $P(\bar{F})$

2- أحسب $P_F(B)$ و استنتج $P_F(\bar{B})$

3- أحسب $P_{\bar{F}}(B)$ و استنتج $P_{\bar{F}}(\bar{B})$

4- أكمل الشجرة (العنكبوتية) بالنتائج المحصل عليها



$$b = \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$$

$$a = \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$d = \frac{n!}{n} - (n-1)!$$

$$c = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

12 أكتب باستعمال العامل $(!)$ كلا من

$$a = 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$$

$$b = n(n-1)(n-2) \quad , n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$c = \frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7}$$

$$d = \frac{1 \times 3 \times 4 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}$$

13 (1) بكم طريقة يمكن اختيار تلميذين من 26 تلميذا ؟

(2) بكم طريقة يمكن اختيار مسؤول عنهم ثم نائب له ؟

14 في الرهان الرياضي المسمى " لوطو + " يختار

المشارك 6 أرقام من بين 49 رقما (كرات مرقمة من 1

إلى 49) .

(1) ما عدد الاختيارات الممكنة ؟

(2) علما أن هناك حالة واحدة فقط للفوز بستة أرقام صحيحة

ما عدد الحالات الممكنة للفوز بأربع أرقام ممكنة ؟

15 يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و

الباقي بيضاء . نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد .

ما عدد الحالات الممكنة للحصول على :

(أ) كرة بيضاء ؟ (ب) كرة بيضاء على الأقل ؟

(ج) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

(2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء

و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس

اللون .

(أ) أثبت أن $X_n = n^2 + 9n + 21 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

(ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$

16 يضم صندوق 15 كرة منها 6 بيضاء تحمل الأرقام

(1, 1, 2, 2, 3, 3) و 5 خضراء تحمل الأرقام

(1, 1, 1, 2, 2) و 4 حمراء تحمل الأرقام (1, 3, 3,

3, 3) . نسحب 3 كرات في آن واحد . ما هو عدد

الحالات الممكنة لسحب :

7 دفع لاعب x DA و أخذ حجرى نرد عاديين و

رماهما. إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين هو 7 ، يربح

20DA و إلا لا يربح أي شيء .

كم يجب على اللاعب أن يدفع في البداية حتى يكون الأمل

الرياضياتي معنوما ؟

8 يضم صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1, 2,

3 و ثلاث قريصات صفراء تحمل الأرقام 1, 2, 3 .

نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق ، ليكن X

المتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت القريصة

المسحوبة بيضاء و إلا يساوي 0 . وليكن Y المتغير

العشوائي الذي يرفق كل سحبة برقم القريصة المسحوبة

(1) عرف قانوني الاحتمال لكل من X و Y

(2) أحسب الأمل الرياضي لكل من X و Y

(3) برهن أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان

(4) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $Y \times X$ و أحسب

أمله الرياضي.

9 نرمي زهرة نرد رمية واحدة و لتكن X العلامة التي

تحدد كمايلي :

a. العلامة (-10) إذا ظهر الرقم 1

b. العلامة (10) إذا ظهرت الأرقام 6

c. العلامة (0) في الحالات الأخرى

نفرض أن زهرة النرد غير متوازنة بحيث احتمال ظهور

الأوجه 1, 2, 3, 4, 5 هو 0, 12 .

- عرف قانون الاحتمال للعدد X في هذه الحالة

العدد

10 بسط الأعداد التالية دون استعمال الآلة الحاسبة

$$a = \frac{8!}{6!} \quad b = \frac{11!}{9 \times 2!}$$

$$c = \frac{13! - 12!}{12!} \quad d = \frac{4}{12!} - \frac{4}{11!} + \frac{4}{10!}$$

11 أكتب على أبسط شكل ممكن العبارات التالية

(n عدد طبيعي أكبر من 1)

(1) 3 كرات من نفس اللون؟ (2) 3 كرات تحمل نفس الرقم؟ (3) 3 كرات مجموع أرقامها 6؟ (4) 3 كرات واحدة على الأقل منها تحمل رقما فرديا؟

17 في كل حالة من الحالات التالية ، ما عدد الكلمات (سواء لها معنى أو ليس لها معنى) ذات n حرف المشكلة من حروف الكلمات المعطاة ؟

(أ) $n = 3$ والكلمة هي " علم "

(ب) $n = 5$ والكلمة هي " معسكر "

(ج) $n = 5$ والكلمة هي " مهيمن "

(د) $n = 6$ والكلمة هي " تلمسان "

(هـ) $n = 6$ والكلمة هي " سلسبيل "

يتنافس 10 لاعبين في دورة للتنس الطاولة .

18 - بكم طريقة يمكن تنظيم الدور الأول ؟

(الدور الأول يتكون من 5 مباريات)

19 من بين 5 جزائريين و 10 سعوديين و 10 فلسطينيين

(1) نختار ثلاث شخصيات من جنسيات عربية مختلفة ،

ما عدد الثلاثيات الممكنة ؟

(2) نفس السؤال من أجل شخصيتين بدل 3 شخصيات

20 في أحد رفوف المكتبة نريد تنظيم 4 كتب إسلامية و

3 كتب ثقافية و 5 كتب رياضيات (شكرا !) .

(1) ما عدد الكيفيات الممكنة إذا أردنا أن تكون كتب

نفس الموضوع متجاورة ؟

(1) إذا كان في آن واحد . ما عدد الحالات الممكنة ؟

(2) (1) إذا كان على التوالي دون إرجاع . ما عدد الحالات

الممكنة ؟

(3) (1) إذا كان على التوالي مع الإرجاع آن واحد . ما عدد

الحالات الممكنة ؟

في رحلة ما قررنا أخذ كتابين يعالجان موضوعين مختلفين

من هذه الكتب للمطالعة . ما عدد الاختيارات الممكنة ؟

من صندوق يحوي 49 كرية مرقمة من 1 إلى 49 ، منها 6 كريات حمراء و الباقي بيضاء . نسحب في آن واحد 6 كريات ما عدد الطرق الكلية ؟

(1) ما عدد الطرق الممكنة للحصول على 3 كريات

بيضاء و 3 كريا حمراء ؟

(2) هل عدد الطرق التي لا تشمل الكريات ذات اللون

الأحمر أكبر من عدد الطرق التي تشمل اللون

الأحمر .

21 يكتب الحرف بطريقة براي (BRAILLE)



بتقرب ورقة في نقطة واحدة على الأقل

من النقاط الستة المبينة في الشكل

(1) ما عدد الحروف المشكلة بثلاث ثغوب ؟

(2) ما عدد الحروف المشكلة بخمسة ثغوب

(3) ما عدد الحروف التي يمكن الحصول عليها سواء

لها معنة بخط براي أو ليس لها معنى ؟

22 يتكون رقم الهاتف من 9 أرقام . الرقم الأول هو 0

و الأرقام الثمانية الأخرى كيفية .

1. ما عدد أرقام الهواتف الكلية ؟

2. ما عدد أرقام الهواتف التي تضم :

(أ) 3 مرات الرقم 1 ؟

(ب) على الأقل ثلاث مرات الرقم 1 ؟

(ج) مرتين الرقم 5 ومرة واحدة الرقم 2 ؟

(د) 5 أرقام زوجية فقط ؟

3. ما عدد أرقام الهواتف التي لا تضم الرقمين 6 و 9 ؟

23 نضع بين يدي طفل ثلاثة أقلام ملونة أخضر ، أحمر

و أصفر و نطلب منه تلوين الأوجه الستة لمكعبة

الشكل . ما عدد الكيفيات الممكنة للتلوين ؟

يتكون قسم من مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة .

24 يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا

(1) ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

(2) ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث ؟

$$\begin{cases} 2C_x^2 = C_y^1 \\ C_{x+y-5}^2 = 4 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases} \quad (1)$$

ثاني الحد

29 (1) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

(2) ليكن x و y عدنان حقيقيان أنشر كلا من :

$$c) (1+x)^4 \quad b) (2-x)^5 \quad a) (2x+1)^6$$

ليكن x عدد حقيقي أنشر كلا من :

$$a) (-x+2y)^5$$

$$b) \left(\frac{1}{3} + x\right)^5$$

$$c) \left(3x + \frac{1}{3}y\right)^5$$

31 أحسب $(2-i)^7$ و $(2+i)^7$ ثم استنتج أن

$$(2-i)^7 + (2+i)^7 \text{ هو عدد حقيقي } (i^2 = -1)$$

32 ليكن n عدد طبيعي . أحسب المجاميع التالية :

$$a) \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k \quad a) \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k 5^{n-k}$$

$$a) \sum_{k=0}^n C_n^k \quad a) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$$

33 n و m عدنان طبيعيان حيث $n \geq m$

(1) أثبت أن $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$ ثم أحسب

$$A = 1 + 2C_n^2 + \dots + mC_n^m + \dots + nC_n^n$$

(2) أثبت أن $mC_{n+1}^m = (n+1)C_n^{m-1}$ ثم أحسب

$$B = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{m+1}C_n^m + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

34 (1) أثبت أن $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ ثم استنتج أن

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \dots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$$

(أ) يكون الأمين تلميذة ؟

(ب) التلميذ X موجودا في اللجنة ؟

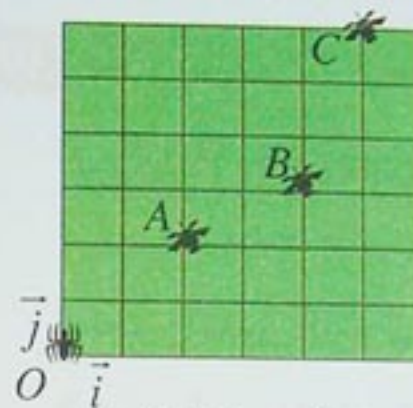
(ج) يكون الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة ؟

(د) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين ؟

(3) نفرض أن الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة وأن التلميذ

X لا يريد الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة Y .

- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف ؟



25 شبكة العنكبوت

الشكل التالي يمثل شبكة

عنكبوت لصقت به ثلاث

حشرات و العنكبوت

في النقطة O

(1) ما عدد المسارات التي يمكن أن تسلكها العنكبوت

للوصول للحشرة A ؟

(2) ما عدد المسارات إذا أرادت العنكبوت بداية وجبتها

بالحشرة B ؟

(3) ما عدد المسارات إذا أرادت العنكبوت بداية وجبتها

بالحشرة C ؟

(4) ما عدد المسارات إذا أرادت العنكبوت الانتقال الى

الحشرة C بعد إلتهاهما للحشرة A فقط ؟

(5) ما عدد المسارات إذا أرادت العنكبوت الوصول

الى الحشر C بعد إلتهاهما لكل من A و B على

الترتيب ؟

26 أوجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية:

$$b : 9C_n^2 = 2C_{2n}^2 \quad a : C_n^3 = 56$$

$$c : C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$$

27 أثبت صحة المسوات التالية

$$(1) C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^{n-1} \text{ مع } n \text{ عدد طبيعي أكبر من } 1$$

$$(2) C_n^m = C_{n-2}^{m-2} + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m$$

مع n و m عددين طبيعيين

28 حل في $\mathbb{N}^2$ الجمل التالية

(2) أحسب المجاميع التالية

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (n-1)n$$

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

35 ليكن المنشور التالي $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$

(1) أكتب الحد الذي درجته 10 .

(2) أوجد معامل الحد التاسع

(3) أوجد الحد الثابت

36 n عدد طبيعي ، ليكن المنشور التالي $(1+x)^n$

(1) إذا علمت أن الحد الثالث في المنشور هو $28x^2$

فأوجد n .

(2) من أجل قيمة n المحصل عليها ، أوجد قيمة x

حتى يكون الحد الخامس هو 1120 .

(3) من أجل $n = 15$ ،

أحسب قيمة العدد الطبيعي m حتى يكون الحدان

الذان رتبتهما (m-1) و (2m+3)

متساويي المعامل .

الاحتمال و المتغير العشوائي

37 ليكن X المتغير العشوائي المعروف كمايلي :

α	1	2	3	4
$P(X = \alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

(1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

(2) أحسب $P(X \geq \frac{5}{2})$ و $P(X < 1)$

(3) أحسب $P(X^2 \leq 2)$

(4) أحسب $P(X^2 - 6X + 8 < 0)$

38 يحوي كيس 5 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين و ليكن X المتغير

العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما .

(1) حدد مجموعة القيم الممكنة للمتغير X .

(2) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

(3) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$

(4) احسب التباين $V(X)$

(5) أوجد $P(X \geq 25)$

39 يحوي صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1 ،

2 ، 3 و ثلاث قريصات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 ،

3 أيضا . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق

و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق القريصة

البيضاء بالرقم (+1) و القريصة السوداء بالصفر ، و

نعتبر أيضا المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل

قريصة الرقم الذي تحمله .

(2) عرف قانون الاحتمال لكل من X و Y

(3) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ و $E(Y)$

(4) أثبت أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان

(5) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X \times Y$

و أحسب أمله الرياضياتي ثم التباين .

40 يحوي كيس أربع قريصات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ،

a ($a \in \mathbb{N}$) . نسحب قريصة واحدة و نعتبر P_k هو

احتمال سحب القريصة ذات الرقم k

1. أحسب الأعداد الحقيقية P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a

إذا علمت أنها بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية

حسابية أساسها $\frac{1}{18}$ (تعطى كسورا غير قابلة للإختزال)

2. ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل قريصة

مسحوبة بالرقم الذي تحمله . أوجد قيمة العدد a إذا علمت

أن الامل الرياضياتي هو $\frac{43}{9}$

41 يحتوي كيس على 20 كرة مرقمة من 1 إلى 20 لا

تفرق بينها عند اللمس .

1- نسحب كرة من الكيس ، ما هو احتمال الحصول على :

أ- كرة تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

ب- كرة تحمل عددا ليس من مضاعفات 5 ؟

2- نسحب في هذه المرة كرتين في آن واحد ، ما هو

إحتمال الحصول على :

أ- كرتين تحملان عددين مضاعفين للعدد 4 ؟

ب- كرتين إحداهما تحمل عددا مضاعفا للعدد 3

و الثانية تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

3- نسحب الآن 3 كرات في آن واحد ، ما هو احتمال

الحصول على :

أ- ثلاث كرات تحمل أعددا مضاعفة للعدد 4 ؟

ب- ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي ؟

42 يحوي كيس 10 كرات متمثلة . خمس منها بيضاء

تحمل الأرقام (1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3) و ثلاث كرات

خضراء تحمل الأرقام (1 ، 2 ، 3) و كرتان حمراوان

تحملان الرقمين (3 ، 3) . نسحب عشوائيا ثلاث كرات

في آن واحد

1- ما احتمال الحصول على :

أ) كرة بيضاء و كرتين حمراوين ؟

ب) كرة حمراء على الأقل ؟

ج- ثلاث كرات مجموع أرقامها يفوق العدد 7 ؟

43 زهرة نرد غير متوازنة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2 ،

3 ، 4 ، 5 ، 6 احتمالات ظهورها في رمية واحدة هي

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ على الترتيب

1. علما أن الأعداد P_1, P_2, P_3 بهذا الترتيب هي حدود

متتابعة من متتالية هندسية ، أوجد الأعداد P_4, P_5, P_6 ،

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

2. نرمي زهرة النرد هذه مرة واحدة .

أ- ما احتمال ظهور رقم زوجي ؟

ب- ما احتمال ظهور رقم مضاعف لـ 3 ؟

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال و احسب أمله الرياضياتي ثم

التباين و الإنحراف المعياري .

44 في سباق 400 متر تتابع ، كل فريق يتشكل من 4

عداين . يريد المدرب تشكيل فريق للمشاركة في مسابقة

من بين 10 عداين مع تحديد ترتيب الإنطلاق للعداين

الأربعة المختارين

1- كم من فريق يمكن للمدرب أن يشكله ؟

تنبيه " فريقين مشكلين بنفس العناصر مع اختلاف في

ترتيب انطلاق كل عنصر هما فريقان مختلفان "

2- ما احتمال أن يكون عدا ما ضمن الفريق المختار ؟

3- تم الآن اختيار العداين الأربعة . لكن فجأة أصيب

ثلاثة عداين من العشرة بوعكة صحية . ما احتمال

اضطرار المدرب الى تغيير الفريق المختار ؟

45 A, B, C معاملات لمعادلة من الدرجة الثانية يتم

تحديدتها من خلال رمي حجر نرد ثلاث مرات متتابة

أحسب احتمال الحوادث التالية :

X " المعادلة الناتجة تقبل حلين حقيقيين "

Y " المعادلة الناتجة تقبل حلين مركبين "

Z " العدد (1 -) حل للمعادلة الناتجة "

46 نريد تقدير كثافة السمك في إحدى البحيرات . من

أجل ذلك قمنا باصطياد 1000 سمكة و وضعنا عليها

علامات مميزة و أعدناها حية الى البحيرة ثم قمنا باصطياد

1000 سمكة بعد ذلك (بفرض أن شروط و ظروف

الإصطياد متشابهة) .

1- أحسب $p(n)$ احتمال الحصول في الصيد الثاني على 100 سمكة تحمل العلامة المميزة مبينا أن الحساب يضطرنا لفرض $n > 1900$

2- باعتبار الفرضية محققة ، أدرس اتجاه تغير $p(n)$ و قارن العدد 1 بالنسبة $\frac{p(n)}{p(n-1)}$ ثم استنتج قيمة n التي من أجلها يكون $p(n)$ أعظميا .

3- إعط تقديرا للعدد n علما أن في الصيد الثاني وجدت 100 سمكة تحمل العلامة المميزة

الاحتمال الشرطي و الحوادث المستقلة

47 في ثانوية ما ، 25 % من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15 % منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و 10 % مستواهم ضعيف في المادتين معا . نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية :

- (1) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء ، ما احتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات أيضا ؟
- (2) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات ، ما احتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء أيضا ؟
- (3) ما احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات أو في مادة الفيزياء ؟

48 يضم صندوق ثلاث قطع نقدية . قطعة عادية (تحمل وجه وظهر) و قطعة تحمل وجهين و القطعة الثالثة مغشوشة بحيث احتمال ظهور الوجه هو $3/1$. نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق و نرميها مرة واحدة . أحسب ل احتمال الحصول على وجه .

49 A, B, C ثلاثة صناديق حيث :

- الصندوق (A) يضم 3 كريات حمراء و 5 كريات سوداء
- الصندوق (B) يضم كرتين حمراوين و كرية سوداء
- الصندوق (C) يضم كرتين حمراوين و 3 كريات سوداء

نأخذ عشوائيا أحد الصناديق و نسحب منه عشوائيا كرية واحدة . إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق من الصندوق (A) ؟

50 يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين . نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع .

نرمز بـ B_i للحادثة " الكرة المسحوبة في المرة i بيضاء " - أحسب الاحتمال $p(B_1)$ ثم مباشرة $p(B_2/B_1)$ و استنتج $p(B_2 \cap B_1)$

51 نضع داخل كيس 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء .

(1) نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد

(أ) ما احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء ؟

(ب) ما احتمال الحصول على 3 كرات سوداء ؟

(2) نسحب 4 كرات عشوائيا و في آن واحد

(أ) ما احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء ؟

(ب) ما احتمال الحصول على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء ؟

(3) نسحب الآن 3 كرات عشوائيا و في آن واحد

- ما احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل ؟

(4) نسحب الآن 3 كرات في آن واحد و لا نعيدها للكيس ثم

نسحب من الباقي 4 كرات في آن واحد .

- ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة الأولى بيضاء و من

بين الكرات الأربعة المسحوبة بعد ذلك كرة واحدة بيضاء فقط

52 A, B كيسان . يضم A كرة حمراء و كرة خضراء .

الكيس B يضم 3 كرات حمراء و كرة واحدة خضراء .

نسحب كرة من الكيس A و نضعها داخل الكيس B ثم

نسحب كرة من الكيس B .

- ما احتمال الحصول على :

(1) كرتين من نفس اللون .

(2) كرة حمراء في السحبة الأولى بشرط أن تكون الكرة

الثانية سوداء .

53 يضم صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 الى 10 .

نسحب قريصتين على التوالي مع الإرجاع .

(1) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 .

(2) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن

مجموعهما 10 .

54 يضم صندوق كرتين سوداوين و ثلاث كرات

بيضاء . نسحب عشوائيا كرة واحدة . إذا كانت بيضاء ،

نعيدها الى الصندوق و نضيف كرة بيضاء أخرى و إذا

كانت سوداء

نعيدها الى الصندوق مع إضافة كرة سوداء أخرى ثم نعيد

عملية السحب مرة ثانية .

أحسب احتمال الحوادث التالية :

A يوجد 3 كرات سوداء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "

B يوجد 5 كرات بيضاء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "

55 يتكون قسم من 25 % من البنات و 75 % من

الأولاد .

نفترض أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم

تلاميذ جيدين . نأخذ عشوائيا تلميذا من القسم .

1- ما احتمال أن يكون : أ- بنتا ؟ ب- ولدا ؟

ج- جيذا ؟

2- ماهو احتمال أن يكون ذلك التلميذ بنتا علما أنها عنصر

جيذا ؟

56 يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 الى 5

و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين

خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 .

- نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد .

1- أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " الكرتان تحملان رقمين فرديين "

B " الكرتان من نفس اللون "

C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "

- هل الحادثان A و B مستقلتان ؟

2- ما احتمال الحوادث التالية :

D " الكرتان من لونين مختلفين "

E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "

3- علما أننا سحبنا كرتين من لونين مختلفين . ما احتمال

أن يكون رقماهما فرديين ؟

57 A ، B ، C ثلاث صناديق تحوي كرات بالشكل

التالي A (5 كرات بيضاء) ، B (3 كرات بيضاء و

كرتين سوداوين) ، C (كرة بيضاء و 4 كرات سوداء) .

يرمي اللاعب زهرة نرد عادية و حسب الرقم المحصل

عليه يسحب عشوائيا من أحد الصناديق بالطريقة التالية .

* إذا كان الرقم هو 1 يسحب من الصندوق (A) .

* إذا كان الرقم هو 2 أو 3 يسحب من الصندوق (B) .

* إذا كان الرقم هو 4 أو 5 أو 6 يسحب من الصندوق (C) .

1- إذا طلب منه سحب كرة واحدة فقط . ما احتمال أن

يسحب كرة بيضاء ؟

(2) إذا طلب منه سحب كرتين في آن واحد .

أ- ما احتمال أن يسحب كرتين بيضاوين ؟

ب- ما احتمال أن يسحب كرتين سوداوين من (B) ؟

3- أعد الإجابة عن الأسئلة السابقة من أجل الصناديق

التالية :

A (5 كرات بيضاء و كرة سوداء) ، B (3 كرات بيضاء

و 3 كرات سوداء) ، C (3 كرات بيضاء و 3 كرات

سوداء) ؟

58 (X) ، (Y) راميا قوس ، كل منهما يسدد سهما

نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق (I - II - III) .

نفرض أن كل رامى يصيب في كل رمية منطقة واحدة

و واحدة فقط .

إذا علمت أن :

- احتمالات إصابة الرامي (X) المناطق I - II - III
على الترتيب هو $\frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{7}{12}$

- احتمالات إصابة الرامي (Y) المناطق I - II - III
متساوية .

1- الرامي (X) يسدد سهمه ثلاث مرات متتابة :

أ- ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة III ؟

ب- ما احتمال أن يصيب المناطق I - II - III بهذا
الترتيب ؟

ج- ما احتمال أن يصيب المناطق I - II - III ؟

2- تختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي

(X) ضعف احتمال اختيار الرامي (Y) .

أ- في حالة تسديد رمية واحدة . ما احتمال أن تصيب
هذه الرمية المنطقة III ؟

ب- علما أن رمية واحدة قد سُددت و أصابت المنطقة III

ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي (X) ؟

59 عمر و يوسف صديقان حميمان . تعاهدا على أن لا

يتزقفا أبدا ، حتى الموت . لكن يوسف المسكين يعاني من

مرض خطير قال بشأنه الأطباء أن احتمال أن يعيش يوسف

عشر سنوات قادمة هو 0.5 .

أ- لكل أجل كتاب " - إذا كان احتمال أن يعيش عمر هذه

المدة هو 0.7 فأحسب :

1- احتمال أن يعيش معا هذه المدة.

2- احتمال أن يعيش عمر وحده هذه المدة.

3- احتمال أن يعيش واحد منهما فقط هذه المدة.

4- احتمال أن يعيش يوسف وحده هذه المدة.

5- احتمال أن لا يعيشا معا هذه المدة.

6- احتمال أن لا يعيشا هذه المدة.

7- أحسب مجموع الاحتمالات التي حصلت عليها .

ماذا تستنتج ؟

60 نعتبر في م المعادلة التالية: $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$

1- أوجد z_1 ، z_2 ، z_3 حلول المعادلة و اكتب الشكل

المتلثي لكل واحد منها .

2- أحسب الجذور التربيعية لكل حل من حلول المعادلة .

3- زهرة نرد متجانسة الأوجه ، كل وجه فيها يحمل جذرا

تربيعيا من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) . نرمي

زهرة النرد هذه مرتين متتابتين .

أ) ما احتمال الحصول على جذرين مربع كل منهما يساوي

الآخر ؟

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل عمليتي رمي

بطويلة جداء العددين المركبين المحصل عليهما .

1- عرف قانون الاحتمال للمتغير X

2- احسب أمله الرياضياتي .

61 (A) ، (B) صندوقان . الصندوق (A)

يحتوي 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء أما الصندوق (B

(B) فيحتوي 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل

الكرات متماثلة .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق (B) و نسجل

لونها و نعيدها الى الصندوق (B) الذي نسحب منه كرة

أخرى و نسجل لونها أيضا .

1- ما احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2- ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟

3- X متغير عشوائي يرفق كل كرة بيضاء بالعلامة

($\alpha +$) و كل كرة سوداء بالعلامة ($\alpha -$) .

أ- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم

أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $E(X) = 1$

4- نضيف الى الصندوق (B) ، 3- كرة سوداء

و نعيد عملية السحب المبينة أعلاه .

أ- ما احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

ب- كم من كرة سوداء ينبغي إضافتها الى الصندوق (B) حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين هو 0,25 ؟

62 يسددرامي ثلاث رميات متتالية نحو هدف (أنظر الى الشكل) .

- إذا علمت أن احتمال إصابة هذا الرامي للهدف هو 0,7 .
- 1- أحسب احتمال أن يصيب الرامي الهدف ثلاث مرات ؟
 - 2- أحسب احتمال أن يصيب الرامي الهدف مرتين فقط ؟
 - 3- أحسب احتمال أن يصيب الرامي الهدف مرة واحدة على الأقل ؟

4- إذا علمت أن الهدف مقسم الى ثلاث مناطق (الشكل) بحيث احتمال أن يصيب هذا الرامي المنطقة (1) هو 0,1 و احتمال أن يصيب المنطقة (2) هو 0,2 و احتمال أن يصيب المنطقة (3) هو 0,4 فأحسب احتمال .

- أ- أن يصيب المنطقة (1) ثلاث مرات ؟
 - ب- أن تصيب كل رمية منطقة واحدة فقط ؟
 - 5- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق إصابة المنطقة (1) بالعلامة 10 و المنطقة (2) بالعلامة 7 و المنطقة (3) بالعلامة 5 و إذا أخطأ الهدف كلية كانت العلامة صفر .
- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري .

63 في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم زوجيا سمح له برمية أخرى و هكذا و تنتهي اللعبة بعد 10 رميات إجباريا أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا .

- 1- ما احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الاولى ؟
- 2- ما احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية ؟
- 3- إذا أراد اللاعب أن يكون احتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات الذي لا ينبغي تجاوزه ؟

4- تقتضي هذه اللعبة أن يدفع اللاعب IDA مقابل كل محاولة (و لا يدفع مادام يحصل على رقم زوجي) على أن يربح 5DA إذا حصل على رقم زوجي .

أ- ما احتمال أن يربح اللاعب 20 DA ؟

- ب- ما احتمال أن لا يخسر و لا يربح ؟
- 5) تعدل اللعبة بالكيفية التالية : صاحب الرقم الزوجي يربح 5 DA و صاحب الرقم الفردي يخسر 2 DA و على كل لاعب أن يحاول 3 مرات فقط إلزاميا .
- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل محاولة بالمبلغ المحصل عليه .

- عرف قانون الاحتمال ثم أحسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري .

64 يريد أحمد أن يتصل بسعيد هاتفيا لكنه - لسوء حظه - نسي الرقم تماما ، فقرر عبثا القيام ببعض المحاولات و ذلك بتشكيل أعداد من 6 أرقام . إذا كان P هو احتمال أن يصيب مبتغاه في المحاولة الأولى.

تعطى النتائج على الشكل ($n \times 10^{-6}$)

- 1- أحسب P .
- 2- تذكر أحمد أمرا هاما ، الرقم الصحيح يضم رقمين زوجيين متميزين فقط . أحسب أنت P إن استطعت .
- 3- بعد قليل تذكر أحمد شيئا آخر . من بين الأرقام الفردية يوجد رقمان فقط من مضاعفات 3. "إن كنت ذكيا" أحسب P.
- 4- و ها هو أحمد بنفسه يؤكد لك أن الرقمين الزوجيين مجموعهما يساوي 10 . فهل بإمكانك الآن حساب P ؟
- 5- سأل أحمد أخاه علي . هل تعرف رقم هاتف سعيد ؟ قال علي : لا ، لكنني أعرف أنه يضم أربعة أرقام فردية منها إثنان متساويان و متتابعان . ساعدهما أنت بحساب P.

6- و يصرخ أحمد لقد تذكرت . إن أحد الرقمين الزوجيين هو 8 و ترتيبه الاول و الرقم الأخير هو 7 . هل تتكرم أنت بحساب P ؟

7- و بعد عدة محاولات استطاع أحمد الإتصال بسعيد الذي ضحك كثيرا لسماعه القصة و قال له يا أحمد تذكر دائما أن مجموع أرقام هاتفك يساوي 30 و هو مكون من أربعة أرقام متساوية مثلى مثلى و متتابعة فالى اللقاء .
- إن فهمت القصة فما رقم هاتف سعيد ؟

65 في دراسة خاصة بحالة سيارات مدينة ما . تبين أن :
% 12 من السيارات ذات مكابح ضعيفة

- من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة هناك % 20 لها إضاءة ضعيفة

- من بين السيارات ذات المكابح القوية هناك % 8 لها إضاءة ضعيفة.

و قصد سلامة الطرقات طُلب من شرطة المرور تكثيف المراقبة . نعتبر الحادثتين التاليتين :

L : السيارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها إضاءة قوية * و $\bar{L}$ الحادثة العكسية لها .

F : السيارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها مكابح قوية * و $\bar{F}$ الحادثة العكسية لها .

1- أحسب احتمال F ، احتمال $\bar{L}$ علما أن $\bar{F}$ محققة ثم احتمال $\bar{L}$ علما أن F محققة

2- أ- أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها مكابح ضعيفة و إضاءة ضعيفة أيضا .

ب- أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها مكابح قوية و إضاءة ضعيفة .

ج- استنتج احتمال أن تكون السيارة الموقوفة من قبل الشرطة لها إضاءة ضعيفة .

3- علما أن سيارة ما روقبت و كانت لها إضاءة ضعيفة . ما احتمال أن تكون لها مكابح ضعيفة أيضا ؟

4- أ- برهن أن احتمال توقيف سيارة في حالة جيدة (مكابح قوية و إضاءة قوية) هو 0,8096

ب- إذا كانت شرطة المرور قد أوقفت 20 سيارة .

ما احتمال وجود سيارة واحدة ليست في حالة جيدة على الأقل ؟

66 نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحددها الأول

$$U_1 = \frac{1}{2} \text{ و } U_n = \frac{2}{5}U_{n-1} + \frac{1}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$$

1- برهن أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\} \quad U_n \in [0;1]$$

2- أ- أوجد العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (V_n) المعرفة بـ:

$$U_n = V_n - \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\} \text{ متتالية هندسية .}$$

ب- أحسب U_n بدلالة n ثم استنتج V_n بدلالة n

ج- استنتج أن (U_n) متقاربة ، أحسب نهايتها .

3- A و B كيسان ، يضم الأول 6 كرات بيضاء و 4

سوداء و يضم الثاني 8 كرات بيضاء و كرتين سوداوين نأخذ عشوائيا كيسا و نسحب منه كرة واحدة ثم نعيدها الى نفس الكيس بالكيفية التالية .:

إذا كانت بيضاء نعيد من نفس الكيس السحب مرة أخرى و إذا كانت سوداء نعيد السحب من الكيس الآخر و هكذا نكرر العملية n مرة .

نسمي U_n احتمال أن تكون السحبة رقم n من الكيس A

أ - أحسب U_1 ، U_2 ، U_3 .

ب- برهن أن $U_n = \frac{2}{5}U_{n-1} + \frac{1}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج - أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

67 (A) ، (B) لاعبان يتباريان في اللعبة التالية :

- في البداية يدفع كل من اللاعبين 1DA كمبلغا للعب و يرمي كل منهما قطعة نقدية عادية .

- إذا حصل (A) على وجه و (B) على ظهر تتوقف اللعبة و يُعلن (A) فائزاً و يأخذ المبلغ المدفوع .
 - إذا حصل (A) على ظهر و (B) على وجه تتوقف اللعبة و يُعلن (B) فائزاً و يأخذ المبلغ المدفوع .
 - الحالات الأخرى تعتبر تعادلاً، يضاعف اللاعبان مبلغ اللعب و يبدأان في المحاولة من جديد . و هكذا تستمر اللعبة و لا تتوقف إلا بفوز أحدهما أو بعد حصول التعادل في المرة العشرين و حينها يستعيد كل لاعب مبلغه المدفوع من أجل كل عدد طبيعي n محصور بين 1 و 20 نعتبر الحوادث التالية :

" A_n " اللعبة تنتهي في المحاولة النونية بفوز (A)
 " B_n " اللعبة تنتهي في المحاولة النونية بفوز (B)
 " I_n " المحاولة النونية هي تعادل

نضع : $X_n = p(A_n)$ ، $Y_n = p(B_n)$ ،

" $Z_n = p(I_n)$ " هو رمز للاحتمال

1- أ- أحسب X_1 ، Y_1 ، Z_1

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n محصور بين

$$1 \text{ و } 19 \text{ لدينا : } X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \text{ و } Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n$$

$$\text{و } Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n$$

ج- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي محصور بين

$$1 \text{ و } 20 \text{ لدينا : } X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ و } Y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{و } Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2- نعتبر المتغير العشوائي $T =$ " مبلغ اللعب أثناء المحاولة التي تنهي اللعبة " (أي المبلغ الذي يحصل عليه الفائز أو المبلغ الذي يتقاسمه اللاعبان في حالة انتهاء اللعبة بالتعادل) .

إذا توقفت اللعبة في المحاولة k يكون حينها $T = 2k$.

أ- حدد أكبر قيمة لـ T .

ب- أحسب $p(T=202)$. (يمكنك ملاحظة أن المحاولة التاسعة عشر كانت تعادلاً)

ج- من أجل كل عدد طبيعي k محصور بين 1 و

$$19. \text{فسر الحادثة " } T = 2k \text{ " بدلالة } A_k \text{ و } B_k \text{ و استنتج } p(T=2k)$$

د- أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي T و انحرافه المعياري .

68 يحتوي صندوق على قريصات خضراء و قريصات بيضاء و أخرى حمراء (لا نمير بينها باللمس)
 10 % من القريصات خضراء و عدد القريصات البيضاء 3 مرات عدد القريصات الخضراء .

يسحب لاعب قريصة عشوائية ، إذا كانت حمراء يأخذ ربحاً قاعدياً ، إذا كانت بيضاء يأخذ مربع الربح القاعدي و إذا كانت خضراء يخسر مكعب الربح القاعدي .

(1) نفرض أن الربح القاعدي هو 20 ديناراً

(a) أكتب قانون الاحتمال للنتائج الممكنة .

(b) أحسب الربح المتوسط المأمول بعد عدد كبير من السحبات .

(2) نريد تعيين g_0 قيمة الربح القاعدي حتى يكون أمل الربح أكبر ما يمكن .

تعطى النتيجة بالدينار

ليكن X الربح القاعدي بالدينار .

(a) بين أن المسألة تنزل الى دراسة النهايات الدية

للدالة f على المجال $[0; +\infty[$ حيث

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$$

(b) أدرس اتجاه تغيرات f على المجال $[0; +\infty[$ ،

استنتج حلاً للمسألة السابقة .

اختيار من متعدد

69 عشرة قريصات مرقمة من 1 إلى 10 ، نختار عشوائيا 3 منها . ما عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم زوجي واحد على الأقل ؟
 (a) 180 (b) 330 (c) 110

70 A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث $P(A) = 0,4$ ، $P(B) = 0,5$ و $P(A \cup B) = 0,35$ قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ هي :
 (a) 0,1 (b) 0,25 (c) المعطيات غير كافية للجواب

71 A ، B حادثتان من فضاء احتمالي حيث $P_A(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ يكون $P(A)$ مساويا :
 (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{24}$ (c) $\frac{1}{12}$

72 X متغير عشوائي قانون احتماله هو :

x_i	1	2	4
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

الانحراف المعياري لـ X هو :
 (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (c) 2

صحيح أم خاطئ

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير الجواب

73 2006 ينتهي بـ 500 صفر

74 كل حادثتين مستقلتان هما حادثتان غير متلائمتين

75 كل حادثتين غير متلائمتين هما حادثتان مستقلتان

76 عدد طرق وضع 10 كريات في 4 علب (دون ترك

علبة فارغة) هو C_9^3

77 A ، b و C ثلاث أعداد طبيعية حيث $a + b < c$

$$C_c^a \times C_{c-a}^b = C_c^b \times C_{c-b}^a$$

78 يضم كيس 10 كرات منها السوداء و منها البيضاء

من جهة و من جهة أخرى منها الثقيلة

و منها الخفيفة . سحب طفل ثلاثة كرات من الكيس و راح يلعب بها .

نهتم بالكرات المسحوبة من قبل الطفل فإذا علمت أن

الشرطين التاليين صحيحين :

* سحب الطفل على الأقل كرة بيضاء خفيفة .

* إذا سحب الطفل كرة ثقيلة فهي إذن سوداء

حدّد الجملة الصحيحة من الآتي :

(1) يمكن إيجاد كرة سوداء خفيفة .

(2) كل كرة خفيفة هي بيضاء.

(3) لا يوجد أية كرة بيضاء خفيفة.

(4) كل كرة سوداء هي ثقيلة.

(5) كل الكرات يمكن أن تكون بيضاء.

79 يكتب الحرف بطريقة براي (BRAILLE)



(الكتابة الخاصة بالكفيف) بثقب ورقة في

نقطة واحدة على الأقل من النقاط الستة

المبينة في الشكل ، إذن يوجد

(1) 6 حروف فقط ذات 5 ثقوب

(2) 15 حرفا ذو 4 ثقوب

(3) 6 حروف ذات 3 ثقوب

(4) 1 - 2 حرفا في كتابة براي

(5) 6! حرفا في كتابة براي.

الكفاءات المستهدفة

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة .
- التعرف على تجربة برنولي .
- إيجاد قانون ثنائي حد لتجربة تتعلق به .
- استعمال نتائج محاكاة من أجل قياس تلاؤم سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي .
- رفض أو قبول نموذج احتمالي انطلاقا من عتبة مقترحة .
- التعرف على أن دالة معرفة على مجال هي كثافة احتمال .
- حساب قانون احتمال متغير عشوائي يقبل دالة f كثافة احتمال و حساب الأمل الرياضي ، التباين و الانحراف المعياري .
- توظيف المتغير العشوائي المستمر لحل مسائل في الاحتمالات .

يلعب **منحنى غوص** (ناقوس غوس) في العلوم الإنسانية دورا معتبرا . فهو صورة للتوزيع الأمثل للصفات الإنسانية .

ففي مجال أطوال الأشخاص مثلا نلاحظ الندرة في الأقزام و العمالة بينما تمثل الأطوال المتوسطة الأغلبية و كذلك الأمر بالنسبة لظاهرة النحافة و البدانة و كذا الذكاء و الغباوة ، الشح و الكرم.... فالمجتمعات المعتدلة التي لا تشذ عن نواميس الكون تتبع دوما هذا المنحنى فهو قياس الاعتدال . الظواهر الطبيعية هي بدورها تتبع توزيع منحنى غوص قبل خضوعها لتأثيرات خارجية كما تتبع المنحنى نفسه عقب تأثيرات عديدة متتابعة و مستقلة .

ناقوس غوص



نشاط أول

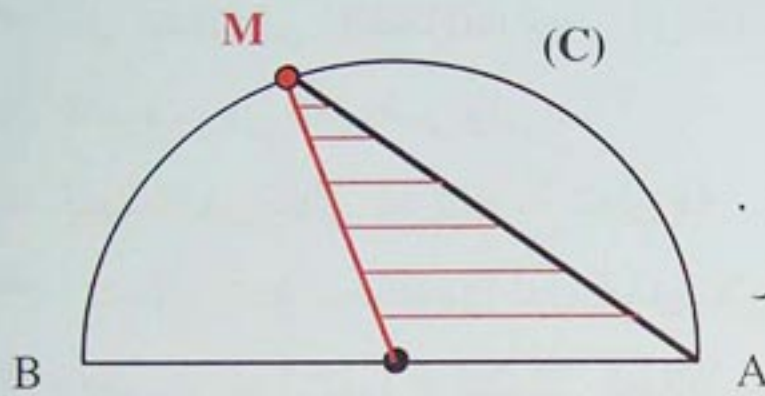
في امتحان ما تُقترح 10 أسئلة اختيار من متعدد (QCM) . كل سؤال يتضمن 3 أجوبة أحدها فقط صحيح . يجيب طالب مترشح عن هذه الأسئلة بطريقة عشوائية .

- أحسب احتمال الحادثتين A و B حيث

A " الحصول على جوابين صحيحين "

B " الحصول على المعدل أو أكثر " (يعني 5 أجوبة صحيحة أو أكثر)

نشاط ثان

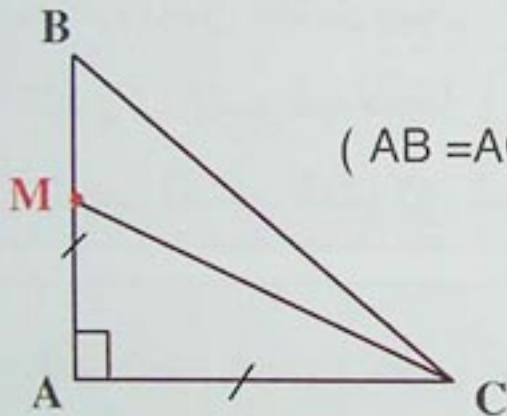


تختار عشوائياً نقطة M على نصف الدائرة (C)

التي قطرها [AB] و مركزها O و نصف قطرها يساوي 1 .

- ماهو الاحتمال P حتى تكون مساحة المثلث AOM أصغر أو تساوي 0,25 ؟

نشاط ثالث



في الشكل المقابل النقطة M تختار عشوائياً من [AB] ، (AB = AC = 1)

(1) ما احتمال أن تكون مساحة المثلث AMC أكبر من مساحة MBC ؟

(2) ليكن X المتغير العشوائي ، " طول CM " = X

(a) برهن أن قيم X تنتمي للمجال $[1; \sqrt{2}]$

(b) أحسب احتمال ($X \leq a$) مع a عدد من $[1; \sqrt{2}]$

نشاط رابع

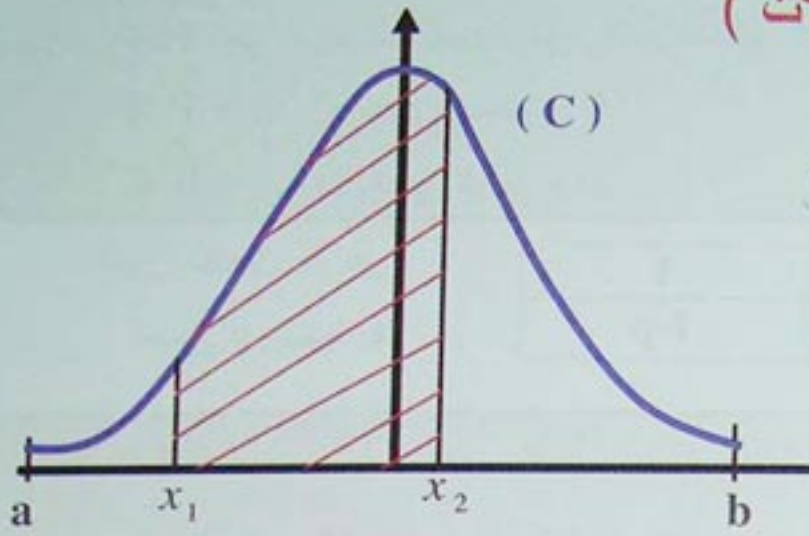
(1) اختر مجالا [a ; b] من المجال [0 ; 1] مع (a < b)

- باستعمال الدالة ALEA() في مجلد الإكسال أو Rand() على الحاسبة قم بمحاكاة 1000 سحبة لعدد من المجال [a ; b]

(2) ماهو التخمين الذي يمكن وضعه بين هذا التواتر و طول المجال [a ; b]

(قم بتغيير المجال [a ; b] و لاحظ)

(احتمالات المجالات)



يبين التمثيل المقابل توزيع أطوال أشخاص في مجتمع ما .
(المضلع التكراري لأطوال قامات أفراد مرتبة في
فئات أطوالها 0,3) . الوحدة (Cm) .

الجزء المشطوب هو احتمال أن يكون طول قامة
(شخص مختار عشوائيا من المجتمع)

نسمي هذا الاحتمال ، احتمال المجال $[x_1; x_2]$

و يرمز له بالرمز $P([x_1; x_2])$

واضح أن $P([a; b]) = 1$ (كل أطوال تقع داخل المجال $[a; b]$)

المنحنى (C) هو تمثيل لدالة f موجبة ، مستمرة تسمى كثافة

$$P([x_1; x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f(s) ds \quad \text{لدينا :}$$

$$F(x) = P([a; x]) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{نعرف الدالة } F \text{ كما يلي}$$

واضح أن مشتقة F هي f . نعرف الاحتمال P كما يلي :

من أجل كل مجال $[a; b]$ من المجال $[0; 1]$ لدينا $P([a; b]) = b - a$

P يرفق بكل مجال محتو في $[0; 1]$ ، طوله . (نكون بهذا قد عرفنا قانون احتمال)

(1) مثل بيانيا الدالة F التي ترفق بكل عدد حقيقي x ($0 \leq x \leq 1$) العدد $F(x)$ حيث $F(x) = P([0; x])$

(2) ماهي f كثافة هذا القانون (الذي يرفق بالمجال طوله) ؟

(3) على التمثيل البياني للدالة f ، فسر هندسيا (باستعمال المساحات) الإحتمالات التالية :

$$(أ) \quad P([0,6; 1]) \quad , \quad (ب) \quad P([0,2; 0,3] \cup [0,5; 1])$$

$$(ج) \quad P\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right) \quad \text{ثم} \quad P(\{x_0\}) \quad \text{حيث} \quad x_0 \in [0; 1]$$

$$(د) \quad P(A) \quad , \quad P(B) \quad , \quad P(A \cap B) \quad , \quad P(A \cup B) \quad \text{حيث}$$

$$A = [0,1; 0,6] \quad \text{و} \quad B = [0,3; 0,7]$$

تعريف نسمي تجربة برنولي كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين S و $\bar{S}$ باحتمالين p و $1-p$ على الترتيب قانون برنولي هو المتغير العشوائي حيث :

$X = 1$ إذا تحقق المخرج S

$X = 0$ إذا تحقق المخرج $\bar{S}$

X	0	1
$p(X = x)$	p	$1-p$

قانون احتمال X هو

نسمي p وسيط X

خاصية :

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع قانون برنولي بوسيط p فإن الأمل الرياضي $E(x)$ و التباين $V(x)$ يعطيان بالعلاقتين التاليتين : $E(x) = p$ و $V(x) = p(1-p)$

$$E(x) = 0 \times P(x=0) + 1 \times P(x=1) = P$$

برهان :

$$V(x) = [0 - E(x)]^2 P(x=0) + [1 - E(x)]^2 P(x=1)$$

$$= P^2(1-P) + (1-P)^2 P$$

$$= P(1-P)[P + (1-P)] = P(1-P)$$

1. مخطط برنولي و قانون ثنائي الحد :

بتكرار تجربة برنولي n مرة (التجارب مستقلة) نعرف مخطط برنولي .

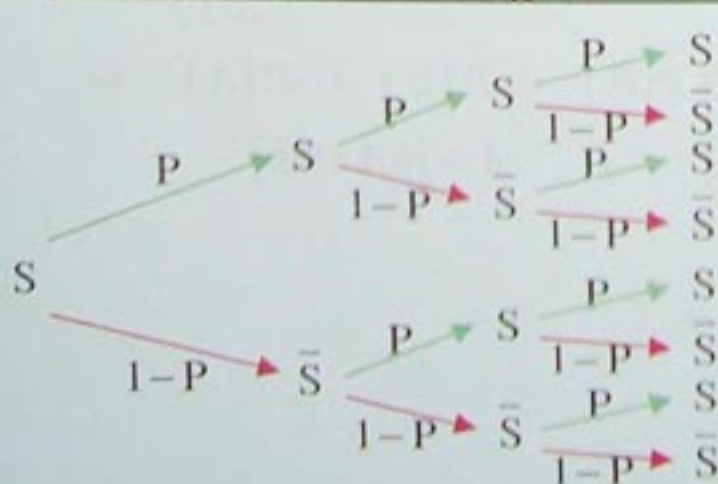
تعريف :

نقول أن متغير عشوائي X يتبع قانون ثنائي الحد بالوسيطين n و p ، إذا كان X يأخذ كقيمة عدد مرات تحقق المخرج S عند تكرار تجربة برنولي n مرة ، ونكتب أحيانا $X \sim B(n, p)$

مبرهنة : ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم و p عددا حقيقيا من المجال $[0;1]$ ،

X متغير يتبع قانون ثنائي الحد $B(n, p)$ من أجل كل عدد طبيعي k ($0 \leq k \leq n$) لدينا :

$$P(x=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} ; E(x) = np ; V(x) = np(1-p)$$



برهان : من أجل فرع معين يحوي k مرة المخرج S أي $(n-k)$ مرة المخرج $\bar{S}$ يكون الاحتمال $p^k (1-p)^{n-k}$ (التجارب مستقلة)

عدد الفروع من هذا النوع (أي التي تحوي k مرة S)

هو C_n^k (اختيار k موضع لـ S من بين n موضعا)

$$P(x=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

ومنه

تمرين محلول :

نرمي 8 مرّات حجر نرد مكعب غير مزور مرقّم من 1 الى 6 . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرّات الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 .

- (1) هل X يتبع قانوناً ؟ في حالة الإيجاب ، أذكر القانون محدداً وسائطه .
- (2) عين الأمل الرياضي و الانحراف المعياري للمتغير X
- (3) ماهو احتمال الحادثة " الحصول على 4 مرّات على مضاعف 3 " ؟
- (4) ماهو احتمال الحادثة " الحصول على 7 مرّات على الأكثر على مضاعف 3 " ؟
- (5) نرمي الآن الحجر n مرّة . ماهو احتمال الحادثة " الحصول على مرّة واحدة على الأقل على مضاعف 3 " ؟
- ماهي أصغر قيمة للعدد n حتى يكون هذا الاحتمال أكبر من 0,999 ؟

حل :

(1) التجربة العشوائية المقترحة هي أن نرمي 8 مرّات بطرق مستقلة الحجر و نسجل المخرجين S " الحصول على مضاعف 3 " ، $\bar{S}$ " عدم الحصول على مضاعف 3 "

هناك مخرجان و بالتالي X تتبع قانون ثنائي الحد بالوسيطين 8 و $\frac{1}{3}$

(لأن احتمال الحصول على مضاعف 3 في كل رمية هو $\frac{1}{3}$)

(2) حسب الدرس $E(X) = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ و $V(X) = 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{9}$ و بالتالي $\sigma(X) = \frac{4}{3}$

(3) احتمال الحصول على 4 مرّات مضاعف 3 هو :

$$p(X = 4) = \frac{1120}{6561} \approx 0,17 \quad \text{أي} \quad p(X = 4) = C_8^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$p(X \leq 7) = 1 - p(X > 7) = 1 - p(X \geq 8) = 1 - p(X = 8) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8 \quad (4)$$

(5) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرّات الحصول على مضاعف 3

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y < 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- تحديد أصغر قيمة لـ n :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0,999 \quad \text{يعني} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,001 \quad \text{و بالتالي} \quad n \geq \frac{\ln(1000)}{\ln \frac{3}{2}}$$

1. الكثافة :

تعريف 1 : دالة معرفة على المجال $[a; b]$ ، $(a < b)$.

نقول أن f كثافة احتمال على $[a; b]$ إذا تحقق ما يلي

$$\textcircled{1} f \text{ مستمرة على } [a; b] \quad \textcircled{2} f \text{ موجبة على } [a; b] \quad \textcircled{3} \int_a^b f(t) dt = 1$$

تعريف 2 : نقول أن X متغير عشوائي معرف على المجال $[a; b]$ ، قانون احتماله P

يقبل f دالة كثافة إذا تحقق ما يلي

$$p(X \in [\alpha; \beta]) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{من أجل كل عددين } \alpha \text{ و } \beta \text{ من } [a; b] \text{ ، } (\beta \geq \alpha) \text{ لدينا}$$

خواص :

من أجل كل α و β ينتميان إلى المجال $[a; b]$

$$p(X = \alpha) = 0$$

$$p(\alpha \leq X < \beta) = p(\alpha < X \leq \beta)$$

$$= p(\alpha < X < \beta) = p(\alpha \leq X \leq \beta)$$

2. قانون التوزيعات المنتظمة :

تعريف : f دالة ، نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون التوزيع المنتظم على

المجال $[a; b]$ ، $(a < b)$ إذا كانت دالة كثافة الاحتمال ثابتة على المجال $[a; b]$

ينتج من التعريف :

$$k = \frac{1}{b-a} \quad \text{و بالتالي} \quad \int_a^b k dt = 1 \quad \text{و منه} \quad \int_a^b f(t) dt = 1$$

أي أن من أجل كل x ينتمي إلى $[a; b]$ يكون $f(x) = \frac{1}{b-a}$

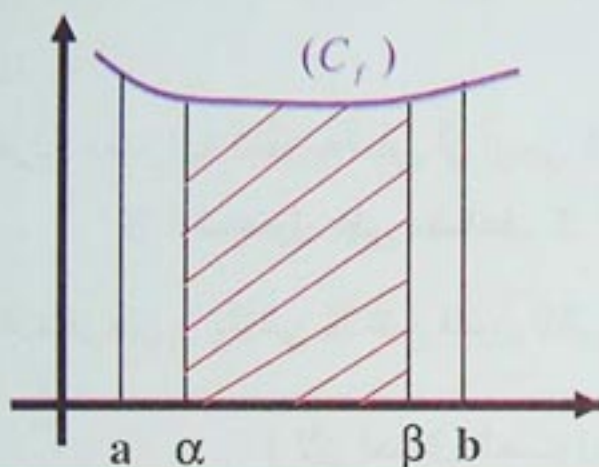
$$P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{لدينا} \quad [a; b] \text{ ينتمي إلى } x \text{ من أجل كل } x$$

$$P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{و بالتالي} \quad P(X \leq x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} \quad \text{أي أن} \quad P(X \leq x) = P(a \leq X \leq x) \quad \text{لأن}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{الأميل الرياضي للمتغير } X \text{ هو}$$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \quad \text{أي} \quad E(X) = \int_a^b xf(x) dx \quad \text{هو} \quad f \text{ كثافته} \quad \text{من التعريف ، الأميل الرياضي لمتغير مستمر كثافته}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{و بحساب بسيط نجد}$$



تمرين محلول 1 : حساب احتمال بتوظيف قانون احتمال مستمر

ليكن m عدد حقيقي و f دالة معرفة على $[0 ; 1]$ كما يلي

$$f(x) = \frac{mx^2}{1+x^3}$$

(1) عين m حتى تكون f دالة كثافة احتمال على $[0 ; 1]$

(2) ليكن X المتغير العشوائي المعروف على $[0 ; 1]$ و الذي قانون احتماله p و يقبل f دالة كثافة احتماله

عين $p(X \leq \frac{1}{2})$ ، $p(X \geq \frac{1}{2})$ ، $p(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2})$ (تعطى القيم مدورة إلى 10^{-2})

حل:

(1) الدالة f معرفة و مستمرة $[0 ; 1]$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{mt^2}{1+t^3} dt = \left[\frac{m}{3} \ln(1+t^3) \right]_0^1 = \frac{m}{3} \ln 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\text{نأخذ } m \text{ حيث } \int_0^1 f(t) dt = 1 \quad \text{أي} \quad m = \frac{3}{\ln 2}$$

و في هذه الحالة تكون f دالة كثافة احتمال .

$$p(X \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\ln 2} \frac{t^2}{1+t^3} dt \quad (2) \text{ لدينا}$$

$$= \left[\frac{1}{\ln 2} \times \ln(1+t^3) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{9}{8} \approx 1,74$$

$$p(X \geq \frac{1}{2}) = 1 - p(X < \frac{1}{2}) = 1 - p(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{9}{8} \approx 0,74$$

$$p(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\ln 2} [\ln(1+t^3)] = \frac{1}{\ln 2} (\ln \frac{9}{8} - \ln \frac{28}{27}) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{243}{224} \approx 0,18$$

تمرين محلول 2 :

نختار عشوائيا عددا حقيقيا من المجال $[\frac{9}{2} ; \frac{16}{3}]$ ، ماهو احتمال أن يكون هذا العدد :

(1) محصورا بين $\frac{9}{2}$ و $\frac{16}{3}$ ؟
(2) أكبر من $\frac{16}{3}$ ؟

حل: ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل العدد المختار . X يتبع إذن قانونا منتظما على المجال $[\frac{9}{2} ; \frac{16}{3}]$

$$p(\frac{9}{2} \leq X \leq \frac{16}{3}) = \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{16}{3}} \frac{1}{\frac{16}{3} - \frac{9}{2}} dt = \left[\frac{1}{2} t \right]_{\frac{9}{2}}^{\frac{16}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \quad (1)$$

$$p(X \geq \frac{36}{7}) = \int_{\frac{36}{7}}^{\frac{16}{3}} \frac{1}{\frac{16}{3} - \frac{9}{2}} dt = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{36}{7} \right) = \frac{3}{7} \quad (2)$$

قياس تلاؤم سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي

◀ **طرح الإشكال :** نريد معرفة ما إذا كان حجر نرد ذي 6 أوجه متزنًا . من أجل هذا نرمي هذا الحجر 1000 مرة و نحسب تواترات ظهور الأرقام من 1 إلى 6 . نرمز لهذه التواترات بالرموز $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$. إذا اقتربت هذه التواترات من $\frac{1}{6}$ فإن الحجر متزن .

نذكر أنه في السنة الثانية ، أثبتنا بالمحاكاة تقارب التواترات و الإحتمالات ، و عليه سنحسب المسافة d حيث

$$d^2 = \sum_{i=1}^6 \left(f_i - \frac{1}{6} \right)^2$$

كلما كانت d^2 أصغر كان الحجر متزنًا .

لنقم بالمحاكاة :

التواتر	ع الظهور	الوجه
0,170	170	1
0,178	178	2
0,168	168	3
0,182	182	4
0,146	146	5
0,156	156	6

(1) في المجدول إكمال ، أدخل في الخلايا من B2 إلى F21

العبارة =Ent(6*ALEA()+1

(2) في الخلية I2 أكتب =NB.SI(\$B\$2:\$F\$21;H2)

ثم عمّم باستعمال الزالِق على الحيز I2:I10

(3) في الخلية J2 أدخل =I2/100 ثم بالزالِق عمّم على الحيز J2:J10

(4) في الخلية H13 أكتب {=(Somme((J2:J10-1/6)^2))}

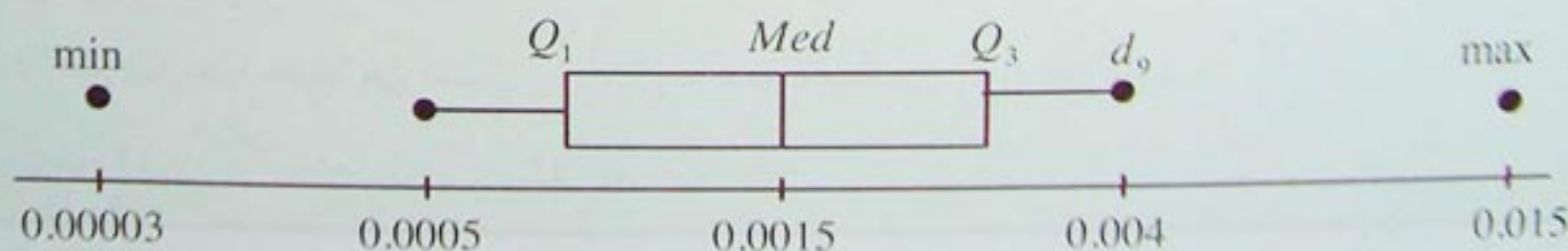
إذا لم تستعمل {} فما عليك سوى بالنقر على CTRL+MAJ+ENTREE في آن واحد

- نحسب d^2 :

$$d^2 = (0,17 - \frac{1}{6})^2 + (0,178 - \frac{1}{6})^2 + (0,168 - \frac{1}{6})^2 + (0,182 - \frac{1}{6})^2 + (0,146 - \frac{1}{6})^2 + (0,156 - \frac{1}{6})^2$$

$$= 0,00092$$

هل قيمة d^2 المحصل عليها تجعلنا نجزم بالحكم على حجر النرد (هل هو متزن أم لا ؟) . و عليه ينبغي معرفة القيم الممكنة للعدد d^2 . عندئذ نأخذ حجر نرد متزن و نكرر التجربة (رمي الحجر 1000 مرة) عدة مرات . كررنا التجربة 3000 مرة فحصلنا على قيم d^2 ملخصة في مخطط بالعلة التالي



إذا كان d^2 أكبر من العشري التاسع من السلسلة المرجعية الملخصة أعلاه ، نقول أن الفرضية " الحجر متزن " مرفوضة بمجازفة بالخطأ مقدارها 10% لأن (10% من قيم d^2 هي أكبر من العشري التاسع) . في الحالة العكسية نقول أن الفرضية " الحجر متزن " غير مرفوضة .

في المثال السابق لدينا : $d^2 < d_0$ و عليه فالفرضية " الحجر متزن " غير مرفوضة .

ملاحظة : يمكن اختيار مجازفة بالخطأ مقدارها 5% و هنا نغير العتبة فنقارن d^2 بالعشري التاسع عشر

قياس التلاؤم

عند القيام بتجربة عشوائية ذات المخارج الممكنة $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ و نكرر هذه التجربة n مرة نسجل التواترات $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ و يمكننا أن نقيس هل التجربة ذات توزيع منتظم أم لا . نعرف عندئذ

$$d^2 = \sum_{i=1}^k \left(f_i - \frac{1}{k} \right)^2 \quad \text{العدد} \quad \text{و نقارن :}$$

إذا كان $d^2 \leq d_0$ نقول أن نموذج التوزيع منتظم

إذا كان $d^2 > d_0$ نرفض نموذج التوزيع منتظم بمجازفة بالخطأ مقدارها 10% .

المقارنة تقتضي سلسلة مرجعية لقيم d^2 .

تمرين محلول : نرمي عشوائيا كرة على سطح طاولة بها 36 ثقباً متشابهها مرقمة من 1 إلى 9

(أي كل رقم نجده على 4 ثقب) . تدور الكرة لتستقر في الأخير داخل ثقب ما . للحكم على ما إذا كانت الكرة

3	5	4	4	1	7	2	3	5	2
5	6	4	6	2	3	5	1	4	5
6	7	7	8	6	7	7	3	3	1
7	4	1	8	5	3	6	5	7	8
9	5	3	1	9	4	6	3	8	3
4	6	8	4	9	5	2	1	4	5
3	9	5	4	3	6	6	5	9	7
7	5	9	5	2	3	3	4	6	5
5	2	2	5	4	2	4	5	9	6
7	8	4	7	5	7	3	3	8	5

مزورة أم لا قمنا بتسجيل 100 نتيجة كما هو موضح في الجدول

(1) أحسب التواترات لظهور الأرقام من 1 إلى 9 ثم أحسب d^2

(2) للحصول على قيم d^2 الممكنة قم بمحاكاة تجربة عشوائية

ذات توزيع منتظم بتسعة مخارج قارن ثم استنتج الحكم

على الفرضية " الكرة غير مزورة "

حل:

(1) نستعمل جدول إكسال متبعين نفس خطوات الدرس

- مع ملاحظة أن توليد الأرقام يتم بالدستور $=Ent(9*ALEA()+1)$ ،

- و أن المقارنة تتم بتوزيع منتظم باحتمال $\frac{1}{9}$ أي نستعمل في الخلية H13 العبارة

$$\{=(Somme((J2:J10-1/9)^2))\}$$

(2) للحصول على قيم d^2 الممكنة نكرر هذه المحاكاة و نسجل قيم d^2 نحصل على $d_0 = 0,016$

من السؤال الأول $d^2 = 0,018$

لدينا إذن $d^2 > d_0$

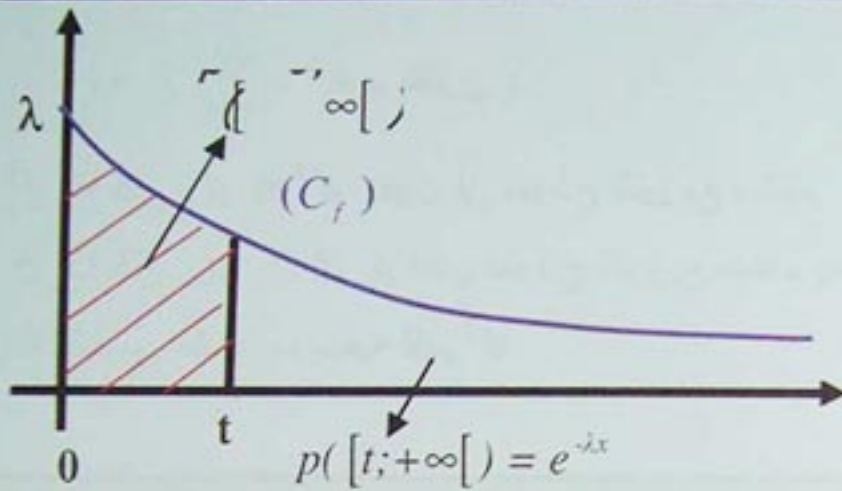
و بالتالي الفرضية " الكرة غير مزورة " مرفوضة بمجازفة بالخطأ مقدارها 10%

القانون الأسّي :

تعريف :

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع القانون الأسّي ذي الوسيط λ إذا كانت دالة كثافة احتماله

هي الدالة f المعرفة من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$



نتائج :

(1) ليكن x عددا من المجال $[0; +\infty[$
 لدينا $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$

البرهان :

$$p(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x$$

$$= -e^{-\lambda x} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda x}$$

(2) الأمل الرياضي للمتغير X هو $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

البرهان :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-\lambda t} \end{cases} \quad \text{و بالتالي}$$

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$E(X) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [t e^{-\lambda t}]_0^\alpha + \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha e^{-\lambda t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\lambda} [e^{-\lambda t}]_0^\alpha = \frac{1}{\lambda}$$

مثال : ليكن X متغير عشوائي يتبع قانونا أسيا بوسيط λ . عيّن λ إذا علمت أن $p(X \geq 50) = \frac{2}{3}$

حل :

$$p(X \geq 50) = 1 - p(X < 50) \quad \text{لدينا}$$

$$p(X \geq 50) = 1 - (1 - e^{-50\lambda}) = e^{-50\lambda} \quad \text{وبالتالي}$$

$$e^{-50\lambda} = \frac{2}{3} \quad \text{نحل المعادلة}$$

$$\lambda = \frac{1}{50} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{نجد}$$

تمرين محلول 1 :

يمثل زمن الانتظار أمام الشباك في إحدى الإدارات متغيراً عشوائياً X يناسب (بالدقائق) فترة الانتظار و يتبع قانوناً أسياً بوسيط λ حيث $\lambda = 0,08$

(1) ما احتمال أن ينتظر شخص :

(أ) أقل من 10 دقائق ؟ (ب) أكثر من 30 دقيقة ؟

(2) ما هو معدل زمن الانتظار ؟

حل:

(1) (أ) نحسب $p(X \leq 10)$

$$p(X \leq 10) = \int_0^{10} 0,08 e^{-0,08t} dt$$

لدينا

$$= 1 - e^{-10 \times 0,08} = 1 - e^{-0,8} = 0,55$$

(ب) نحسب $p(X \geq 30)$

$$p(X \geq 30) = 1 - (1 - e^{-30 \times 0,08})$$

لدينا

$$= e^{-2,4} = 0,09$$

(2) المعدل هو $E(X)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{100}{8} = 12,5$$

(أي معدل الانتظار هو 12 دقيقة و 30 ثانية)

تمرين محلول 2 :

تقدر شركة لإنتاج الشاحنات بأن مدة صلاحية الشاحنة (مقدرة بالسنوات) هي متغير

عشوائي X يتبع قانوناً أسياً . علماً أن معدل مدة الصلاحية هو 14 سنة

(1) عين وسيط هذا القانون .

(2) عين دالة كثافته

(3) أحسب احتمال أن تكون مدة صلاحية شاحنة أكبر من 20 سنة .

حل:

$$(1) \text{ لدينا } E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ و منه } \lambda = \frac{1}{14} \text{ أي } \lambda = 0,071$$

$$(2) \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال } [0 ; +\infty[\text{ لدينا } f(x) = \frac{1}{14} e^{-\frac{x}{14}}$$

$$(3) \text{ نحسب } p(X \geq 20) \text{ لدينا } p(X \geq 20) = 1 - p(X < 20) = e^{-\frac{20}{14}} = e^{-\frac{10}{7}}$$

$$\text{أي } p(X \geq 20) \approx 0,24$$

محاكاة مرجعية

نحاكي بواسطة مجداول إكسال اختيار نقطة M اختياراً عشوائياً على دائرة (C) قُطرها [AB] و مركزها O و نصف قُطرها 1 . بعد المحاكاة نحسب احتمال أن تكون مساحة المثلث AOM أصغر من 0,25 .

المرحلة الأولى

◀ العمود الأول : أرقام السحب

◀ العمود الثاني : قيم المتغير العشوائي θ الذي يتبع قانوناً منتظماً على المجال $[0 ; \pi]$ و ذلك باستعمال التعليمة

$$=Pi()*Alea()$$

◀ العمود الثالث : مساحة المثلث AOM بالدستور $S = \frac{1}{2} \sin \theta$ و على المجدول نكتب

$$=0.5*\sin(LC(-1))$$

◀ العمود الرابع : تواترات المثلث AOM و التي مساحتها أصغر من 0,25 و ذلك باستعمال

$$=NB.SI(L2C3:LC(-1); "<=0,25")/LC(-3)$$

المرحلة الثانية

لن نقوم بسحب 1000 مرة .

لن نختار العمود الرابع و نستعمل راسم المجدول للحصول على التمثيل البياني (بالضغط مرتين متتبعيتين على الفأرة تعطى التراتيب برقمين بعد الفاصلة نأخذ 0 قيمة دنيا و 1 قيمة قصوى على محور التراتيب بالضغط على اللمسة F9 على لوحة مفاتيح الحاسوب نحصل على سلاسل أخرى و نلاحظ القيمة التي تستقر عليها التواترات .

إنشاء مثلث

نأخذ عشوائياً ثلاثة أعداد حقيقية x, y, z كل منها مختلف عن الآخرين من المجال $[0 ; 1]$ علماً أن :
كل ثلاثة أعداد حقيقية موجبة تماماً تكون أطوالاً لمثلث إذا و فقط إذا كان $x < y + z$ و $y < x + z$ و $z < x + y$
لن أنجز بمجدول الإكسال محاكاة تستخرج من خلالها قيمة استقرار التواترات.

الإحتمالات الشرطية و القانون الأسي

مدة حياة ذرة

ثابت التحلل هو $\lambda = 10\%$.

نريد محاكاة قانون احتمال المتغير العشوائي "مدة حياة ذرة"

المرحلة الأولى

الخطوة الأولى : كتابة قيمة الثابت λ في الخانة A1

الخطوة الثانية : إدخال قيم الزمن t على سلم الزمن في الحيز A2:A32

الخطوة الثالثة : ملء الخلايا في الحيز B2:B10002 بالرقم 1 (استمل التعميم بالفأرة)

كل رقم 1 يمثل ذرة أي لدينا 10000 ذرة في اللحظة $t = 0$

الخطوة الرابعة : العمود الموالي سنحاكي فيه الذرات في حالاتها الجديدة في اللحظة $t = 1$

و ذلك بكتابة التعليمة $=SI(ALEA0<\$A\$1;0;\$A\$3)$ في الخلية B3

و هذا يعني سحب عدد عشوائي من المجال $[0 ; 1]$ فإذا كان أصغر من λ تموت الذرة و إلا تبقى على حالتها السابقة

الخطوة الخامسة : ثم نعيمها على العمود ثم على كل الجدول أي B3:AG10002 بالفأرة

المرحلة الثانية

تمثيل البياني

عين عدد الذرات الحية $y(t)$ في كل لحظة t و ذلك بجمع نتائج كل عمود .

مثل بيانيا $y(t)$ بتحديد خلايا الصف الأخير أي الحيز A10003:AG10003 و خلايا العمود الأخير

أي الحيز AG3:AG1002 في آن واحد و ذلك بواسطة الفأرة والزر Ctrl على لوحة المفاتيح

باستعمال الراسم المرفق في المجدول أنجز تمثيلا بيانيا (صنف أسي)

بالضغط على اللمسة F9 على لوحة مفاتيح الحاسوب نحصل على سلاسل أخرى و نلاحظ القيمة التي

تستقر عليها التواترات .

موضوع محلول

(تعطى النتائج مدورة الى 10^{-4})

في دراسة أعدتها مؤسسة الكهرباء عن الأخطار التي يتعرض لها عمالها ، تبين أن كل عامل معرض باستمرار الى خطرين رئيسيين : الخطر (A) " سقوط العامل من العمود الكهربائي " احتمالته 0,03 و الخطر (B) " تعرض العامل لصعق كهربائي " احتمالته 0,17 ، مع العلم أن الخطرين مستقلان عن بعضهما البعض . نسمي العامل الذي يصاب بأحد الخطرين " عامل مصاب " .

(1) نأخذ عاملا عشوائيا من هذه المؤسسة . بين أن احتمال أن يكون مصابا هو 0,1949

(2) هذه المؤسسة تضم 500 عامل . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق عمال المؤسسة بعدد العمال المصابين .

عرّف قانون X و احسب أمله الرياضياتي

(3) (a) في فصل الشتاء شكلت المؤسسة فوجا مكونا من 10 عمال للتدخل السريع من أجل إصلاح مختلف الأعطاب التي

قد تحدث جراء التقلبات الجوية . أحسب احتمال أن يكون في هذا الفرع أكثر من عاملين مصابين .

(b) حتى لا يؤثر المصابون على أداء زملائهم ، فكرت إدارة المؤسسة في إعادة تشكيل فرع التدخل السريع بحيث يصبح

احتمال وجود عاملا مصابا على الأقل ، أقل من 50 % . ماهو أكبر عدد من العمال يمكن أن يضمه هذا الفرع ؟

توجيهات

الترميز الجيد أحد العوامل

المساعدة على الحل

$$p(D) = p(T \cup E)$$

$$= p(T) + p(E) - p(T \cap E)$$

X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه

500 و 0,1949 (لأن كل عامل

من المؤسسة هو مصاب أو غير

مصاب)

$$p(Y > 2) = 1 - p(Y \leq 2)$$

باستعمال اللوغاريتم

حل مختصر

(1) نرمز بـ T للحادثة " العامل تعرض لخطر السقوط ما عمود كهربائي "

و بـ E للحادثة " العامل تعرض لخطر السقوط الصعق الكهربائي "

و بـ D للحادثة " العامل مصاب "

$$p(D) = p(T) + p(E) - p(T) \times p(E) = 0,03 + 0,17 - 0,03 \times 0,17 = 0,1949$$

$$p(X = k) = C_{500}^k (0,1949)^k (0,8051)^{500-k} \quad (2)$$

$$E(X) = 500 \times 0,1949 = 97,45$$

$$p(Y > 2) = 0,3074 \quad (a) \quad (3)$$

(b) نفرض n العدد المطلوب و نعتبر Z المتغير العشوائي الموافق لعدد

المصابين في فوج التدخل السريع الجديد

$$\text{لدينا } p(Z \geq 1) \leq \frac{1}{2} \quad \text{هذا معناه } 1 - p(Z < 1) \leq \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

$$1 - p(Z = 0) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{ينتج من هذا المتراجحة } 0,8051^n \geq \frac{1}{2} \quad \text{و منه } n = 3$$

موضوع موجه

لاحظ مدير ثانوية ارتفاع عدد الغيابات مع تكررها عند بعض التلاميذ و عندما بحث في الأمر وجد أن أسباب الغياب تتمثل في المرض أو مشكل النقل .

نعتبر نحن X المتغير العشوائي الذي يحدد المدة الزمنية (بالأيام) التي يدرس فيها أحمد دون أي غياب .
نقبل أن X يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 0,01$. علما أن قانون الاحتمال معرف بـ

$$P(X \leq \alpha) = \int_0^{\alpha} 0,001 e^{-0,01x} dx$$

(1) أحسب احتمال أن تكون الفترة الدراسية لأحمد دون غياب :

(أ) محصورة بين 30 و 60 يوم (ج) أكبر من 90 يوم

(2) إذا علمنا أن أحمد يتابع دروسه منذ 100 يوم دون غياب أي درس . ما احتمال أن يكمل الثلاثي الذي مدته 110 يوما دون غياب ؟

(3a) بالمكاملة بالتجزئة ، أحسب $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x}{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx$

(b) أحسب $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} I(\alpha)$. (هذه النهاية تعبر عن الفترة المتوسطة التي يزاوّل فيها تلميذ دراسته دون أي غياب)

(4) تضم هذه الثانوية N_0 تلميذا الفترات الدراسية التي يقضيها كل تلميذ دون غياب هي عبارة عن متغيرات عشوائية

مستقلة متنى متنى ، تتبع نفس القانون الأسّي ذي الوسيط $\lambda = \frac{1}{100}$.

d عدد حقيقي موجب . نضع Y_d المتغير العشوائي الذي يساوي عدد التلاميذ الذين لم يتغيّبوا طيلة الفترة d (بالأيام) .

(a) برهن أن Y_d يتبع قانون ثنائي حد وسيطه N_0 و $e^{-\lambda d}$

(b) أعط العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيّبوا طيلة الفترة d يوم

توجيهات

1. (a) $P(X \leq 60) = \int_0^{60} 0,001 e^{-0,01x} dx$ لكن $P(30 \leq X \leq 60) = ?$

(b) يمكن استعمال الحادثة العكسية

2. ما علاقة $P(X \geq 10) \rightarrow P_{X \geq 100}(X \geq 110)$ ؟

4 (a) انتبه ! Y_d يتبع قانون ثنائي حد وسيطه N_0

و $P(X \geq d) = 1 - P(X < d) = e^{-\lambda d}$

(b) هل تعلم أن العدد المتوسط هو الأمل الرياضي لـ Y_d ؟

1 في امتحان شهادة بكالوريا كانت نسبة النجاح % 40. ما احتمال ضمن 5 أصدقاء مرشحين :

- (1) أن لا يكون أي ناجح ؟
- (2) أن ينجح واحد فقط ؟
- (3) أن ينجح إثنان فقط ؟
- (4) أن ينجح على الأقل إثنان ؟
- (5) أن ينجح الأصدقاء الخمسة ؟

2 عائشة ، فاطمة و خديجة ثلاث صديقات تقدمن لامتحان شهادة البكالوريا بحظوظ متفاوتة متناسبة مع مجهودات كل واحدة خلال السنة الدراسية . إذا علمت أن احتمال نجاح فاطمة 0.9 و احتمال نجاح عائشة 0.45 و احتمال نجاح خديجة . أحسب احتمال أن :

- 1- تتجح الصديقات الثلاث معا.
- 2- تتجح واحدة منهن على الأقل.
- 3- تتجح صديقتان فقط.

4- تتجح صديقتان من بينهما فاطمة

3 نرمل زهرة نرد عادية أربع مرات متتالية.

- 1- أحسب P احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي.
- 2- أحسب p' احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي.
- 3- أجب عن السؤالين (1) و (2) من أجل خمس رميات متتالية لزهرة النرد هذه.
- 4- نرمل زهرة النرد هذه n مرة . أحسب P .

4 في إحدى المسابقات يطرح على المرشح ثلاثة سؤال مرفوق بثلاثة أجوبة مقترحة متشابهة ، واحدة منها فقط صحيحة . قدم المرشح إجابة عشوائية و دون تفكير .

- (1) ما احتمال أن تكون إجابته صحيحة ؟
- (2) المسابقة مكونة من 5 أسئلة من الشكل السابق . (أ) ما احتمال أن يقدم هذا المرشح إجابة صحيحة عن :
- 3 أسئلة ؟ - 4 أسئلة ؟ - 5 أسئلة ؟
- (ب) إذا كان النجاح في المسابقة يقتضي الإجابة الصحيحة عن 3 أسئلة على الأقل . ما احتمال نجاح هذا المرشح

الذي يعتمد على العشوائية في الإجابة ؟

(ج) ما احتمال نجاح مترشح آخر يملك الإجابة الصحيحة عن سؤالين من الخمسة ؟

5 (1) نرمل حجري نرد عاديين مرة واحدة .

- ال احتمال الحصول على رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 10 ؟

(2) نرمل الآن حجر النرد 5 مرات متتالية و ليكن X

المتغير العشوائي الذي يرفق كل 5 رميات بعدد المرات التي نحصل فيها على رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 10

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري .

6 نكت رشيد

يحب رشيد صناعة النكت لكنه للأسف لا يوفق أحيانا في تشكيل النكتة المرحّة حيث احتمال أن تكون النكتة مرحّة هو 0,05 . علما أنه يشكل نكتة كل يوم أحسب احتمال أن يشكل نكتة مرحّة :

(1) في أسبوع . (2) في شهر (30 يوما) (3) في سنة (365 يوم)

7 نرمل قطعة نقود عادية n مرّة . بداية من أية رمي يصبح احتمال الحصول على وجه واحد على الأقل أكبر تماما من 98% ؟

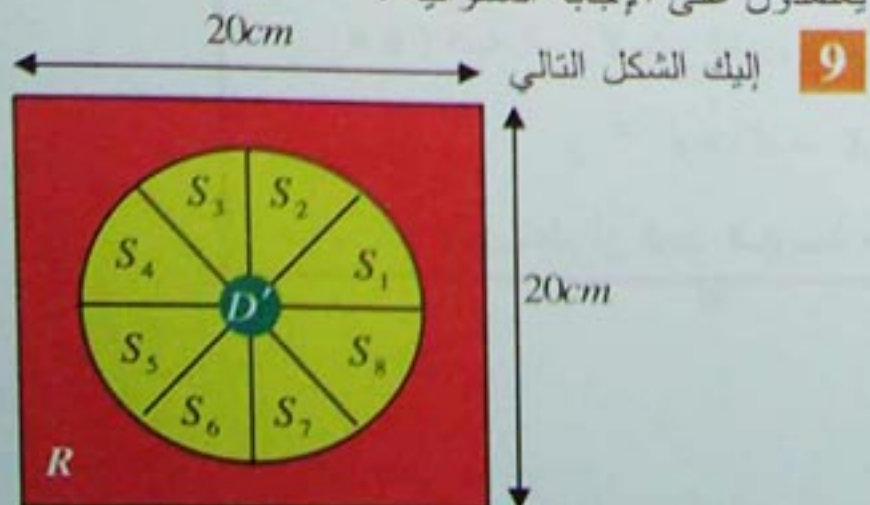
8 في مسابقة علمية تطرح 100 سؤال ، كل سؤال

مرفوق بثلاث أجوبة مقترحة واحد منها فقط صحيحة .

- بداية من كم إجابة صحيحة يكون نجاح المترشح ؟

مع العلم أننا نريد إقصاء 95 % من المترشحين الذين

يعتمدون على الإجابة العشوائية .



أحسب $\bar{x}$ و σ من أجل النتائج في الجدول و قارنها مع نتائج السؤال (1)

(3) أحسب نظريا عدد المرات الموافقة للقيم n_i

11 يضم صندوق 5 قريصات، 4 سوداء و واحدة بيضاء .

(1) نسحب من الصندوق 6 قريصات على التوالي مع الإرجاع . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية عدد مرات ظهور القريضة البيضاء .

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير X و احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري .

(2) نقوم الآن بالسحب n مرة (بنفس الكيفية السابقة) .

ليكن X_n لمتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية عدد مرات ظهور القريضة البيضاء .

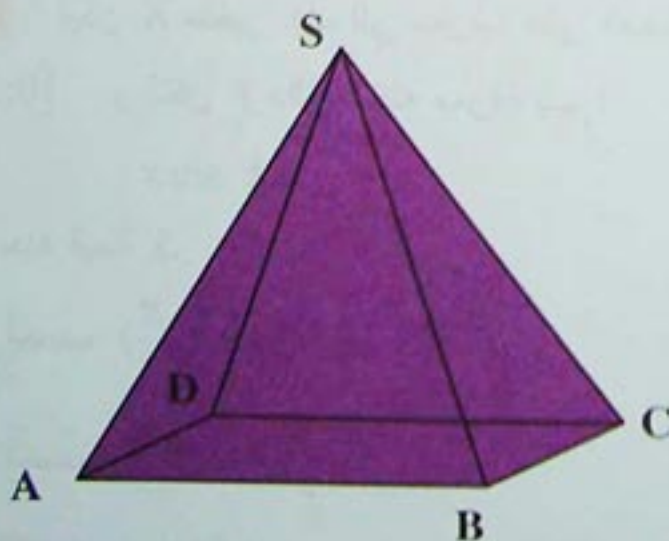
- عرّف قانون الاحتمال للمتغير X_n و احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري .

(3) ليكن Y_n المتغير العشوائي $\frac{X_n}{n}$ الذي يمثل تواترات ظهور القريضة البيضاء

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير Y_n و احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري .

12 (1) تسير نملة على أحرف هرم متقلبة عشوائيا من رأس الى رأس مجاور (نفرض أن فضاء الاحتمالي منتظم) . كلما انتقلت النملة من رأس الى آخر نقول أنها أنجزت " خطوة "

النملة موجود الآن على الرأس A . (أنظر الشكل)



(a) بعد خطوتين ، ما احتمال أن تكون النملة في الرأس

نضع عشوائيا نقطة على هذا الشكل . احتمال أن تكون النقطة في جزء ما هو نسبة مساحة هذا الجزء الى مساحة المربع .

(1) أ) أحسب $p(D)$ احتمال أن تكون النقطة على القرص الأخضر D' .

ب) أحسب $p(S_1)$ احتمال أن تكون النقطة على الجزء S_1 من القرص الأصفر الكبير .

(2) من أجل القيم التقريبية التالية $p(D) = 0,008$

و $p(S_k) = 0,0785$ مع $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ نعتبر اللعبة التالية :

- إذا كانت النقطة على القرص D' نربح 10 DA

- إذا كانت النقطة على الجزء S_k نربح k DA مع $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

- إذا كانت النقطة تقع في المنطقة R الحمراء نخسر 4 DA نرسم X للمتغير العشوائي الذي يعبر عن المبلغ المحصل عليه من هذه اللعبة .

(أ) أحسب $p(R)$ ثم أحسب الأمل الرياضي لـ X

(ب) نلعب مرتين متتابتين ، أي وضعنا عشوائيا و بكيفيتين مستقلتين نقطتين داخل المربع . أحسب احتمال الحصول على مبلغ موجب أو معدوم .

(ج) ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 . نلعب n مرة متتابة أي وضعنا n نقطة عشوائيا و بكيفيات مستقلة داخل المربع . أحسب الاحتمال p_n للحصول على نقطة واحدة على الأقل داخل القرص D' .

- حدد أصغر قيمة لـ n يكون من أجلها $p_n \geq 0,9$

10 نرمي 12 حجرة نرد مرة واحدة و نسجل عدد مرات ظهور الأرقام 4 ، 5 أو 6 و ليكن x .

(1) أحسب $\bar{x}$ و σ

(2) نقوم الآن برمي الأحجار الإثني عشر ، 6500 مرة متتابة و نسجل قيمة x في كل مرة (أنظر الجدول)

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	14	103	302	711	1231
	6	7	8	9	10	11
	1411	1351	844	391	117	21
						3

A - ؟ B - ؟ C - ؟ D - ؟

(b) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

نضع S_n الحادثة " النملة في الرأس S بعد n خطوة "

و p_n احتمالاتها

- أوجد p_1 .

- مع ملاحظة أن $S_{n+1} = S_n \cap \bar{S}_n$

برهن أن : $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$

(2) نعتبر المتتالية (p_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم n كما يلي

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$$

(a) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$p_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

(b) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$

2. قانون الاستمرار

13 ليكن P احتمال معرف على المجال $[1; 4]$

و لنكن f دالة كثافته معرفة بـ $f(x) = \frac{k}{x^2}$.

حدد قيمة k .

14 ليكن P احتمال معرف على المجال $[-1; 3]$

و لنكن f دالة كثافته معرفة بـ $f(x) = k|x|$.

حدد قيمة k .

15 ليكن X متغير عشوائي معرف على المجال

$[0; \pi]$ و لنكن f دالة كثافته معرفة بـ :

$$f(x) = k \cdot \sin x$$

(1) حدد قيمة k .

(2) أحسب $p(x \geq \frac{\pi}{3})$

(3) أحسب $\int_0^{\pi} x f(x) dx$

16 ليكن X متغير عشوائي يعبر عن العدد المأخوذ

عشوائيا من المجال $[-3; 5]$

(1) ما هو القانون المتبع من قبل X ؟

(2) أحسب أمله الرياضياتي و تباينه

(3) أحسب $p(x \geq \frac{1}{3})$ ، $p(x = 0)$ ، $p(x < 0)$

و $p(x \leq \frac{4}{5})$

17 نأخذ عشوائيا عددا من المجال $[2; 13]$. ما احتمال

(1) الحصول على عدد أقل من 10 ؟

(2) الحصول على رقم جزؤه الصحيح زوجي ؟

• التمارين الأربعة الآتية نعتبر فيها المتغير العشوائي

T الذي يأخذ قيمه من المجال $[0; +\infty]$ و الذي يتبع

قانونا أسيا وسيطه العدد الحقيقي λ الموجب تماما .

18 نفرض أن $\lambda = 1$

(1) ارسم المنحنيين البيانيين لدالة توزيع T و كثافته .

(2) فسر بيانيا على المنحنيين الإحتمالين لتالين

$p(T \leq 0,5)$ ، $p(T > 1)$ و اعط قيمة كل منهما

مدورة الى 10^{-3}

19 من أجل أي قيمة لـ t يكون للحادثة $(T < t)$ و

الحادثة العكسية لها نفس الاحتمال ؟

20 برهن أن إحتمال الحادثة $(T > \frac{1}{\lambda})$ مستقل

عن λ ثم اعط أحتمال هذه الحادثة مدورة الى 10^{-3}

21 لنكن g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty]$

و غير معدومة حيث $g(t+h) = g(t) \cdot g(h) \dots (1)$

وذلك من أجل كل عددين حقيقيين موجبين t و h

(1) برهن أن $g'(t) = \alpha g(t)$ من أجل كل $t \geq 0$

مع $\alpha = g'(0)$

(2) استنتج أن $g(t) = e^{\alpha t}$ من أجل كل $t \geq 0$

22 متوسط عمر التلفاز :

تصرح شركة أن متوسط عمر تلفاز (بالمسنوات) هو متغير

عشوائي يتبع قانون أسيا . علما أن متوسط عمر الشاحنات

هو 14 سنة .

(1) أوجد وسيط القانون الأسيا

(2) أوجد دالة الكثافة f

(3) ما احتمال أن يكون متوسط تلفاز ما أكبر من 20 سنة ؟

(4) ما احتمال أن يكون تلفاز قد استعمل 14 سنة قادرا على العمل 6 سنوات أخرى ؟

23 متوسط عمر مقاومة كهربائية :

متوسط عمر مقاومة كهربائية يتبع قانون أسي نرمز له بـ X (يعبر عنه باليوم) وسيطه 0,0012 .

(1) ما متوسط عمر مقاومة

(2) أحسب احتمال أن تعمر مقاومة :

(أ) أكثر من 100 يوم .

(ب) أقل من 60 يوما .

(ج) 100 يوم علما أنها تستعمل منذ 60 يوما .

(3) أحسب t (عدد الشهور) حتى يكون احتمال أن تعمر

مقاومة ما t شهرا هو 0,5 .

24 في مركز البريد

في مركز بريدي لإحدى البلديات مدة الإنتظار عند الشباك

(بالدقائق) تمثل بمتغير عشوائي X يتبع قانونا أسيا

وسيطه 0,07 .

(1) ما هو متوسط وقت الإنتظار ؟

(2) ما احتمال أن ننتظر :

(أ) أكثر من نصف ساعة ؟

(ب) أقل من 20 دقيقة ؟

(ج) أكثر من ساعة علما أننا ننتظر منذ نصف ساعة؟

25 نهتم بدراسة متوسط عمر (بالأسابيع) جهاز

إلكتروني .نعبر عن هذه الوضعية بقانون احتمال p

لمتوسط العمر من دون أعطال معرف على المجال

$[0; +\infty[$.

احتمال أن لا يكون الجهاز في حالة جيدة طيلة المدة t هو

$$p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

دراسة احصائية بينت أن 50% من جملة أجهزة مشغلة منذ

200 أسبوع لازالت في حالة جيدة و بالتالي

$$p([0; 200]) = 0,5$$

$$(1) \text{ برهن أن } \lambda = \frac{\ln 2}{200}$$

(2) ما احتمال أن يكون عمر جهاز مختار عشوائيا أكبر من

300 أسبوع ؟ (النتيجة تعطى بدقة ثم مدورة الى

10^{-2}

(3) نقبل أن متوسط عمر الأجهزة يعطى بالعلاقة

$$d_m = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$(أ) \text{ برهن أن } \int_0^{\alpha} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda \alpha e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \alpha} + 1}{\lambda}$$

(ب) استنتج d_m . (النتيجة تعطى بدقة ثم مدورة الى

10^{-2}

26 كتبت لبنى أعداد طبيعية أصغر تماما من 10 على

ورقة . وهذه هي أعداد لبنى

3, 4, 2, 4, 7, 1, 1, 2, 6, 9, 8, 8, 7,

3, 4, 5, 6, 9, 6, 8, 3, 7, 5, 9, 1, 1,

2, 8, 3, 9, 5, 8, 2, 7, 6, 8, 1, 2,

9, 7, 8, 1, 1, 3, 5, 6, 7, 2.

(1) لخص هذه المعطيات في جدول من عمودين

(2) أحسب الوسط الحسابي ، التباين و الانحراف المعياري

(3) أحسب الوسيط و الربعيين

(4) أنشئ مخططا بالعلب لهذه السلسلة

(5) نتساءل عن مدى انسجام أعداد لبنى المكتوبة بطريقة

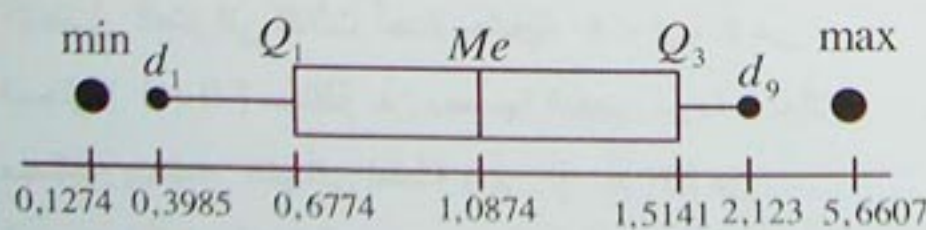
عشوائية . من أجل هذا نقترح حساب d^2

(6) باستعمال الحاسوب أجرينا 1000 عملية لاختيار 50

رقما محصورا بين 1 و 9 حصلنا على 100 نتيجة لـ d^2

قمنا بتلخيص توزيع قيم d^2 100 على مخطط بالعلب

نتج:



هل يمكن التأكيد بمجازفة بالخطأ مقدارها 10% أن للبنى

تلقائية في انسجام العشوائية لديها (أرقامها العشوائية

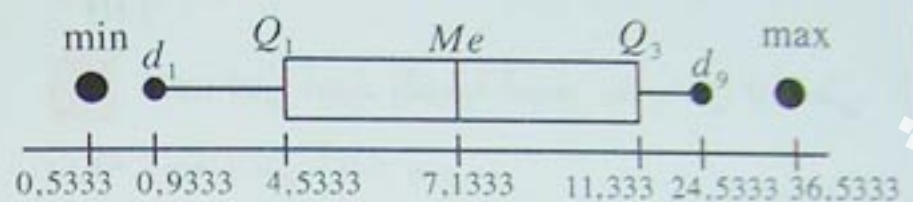
منسجمة دوما) ؟

27 للتحقق من مصداقية حجر نرد ، قمنا برمي 100

مرة متتالية و إليك النتائج

الوجه	1	2	3	4	5	6
مرات الظهور	23	18	21	8	19	11

نجري بجهاز الحاسوب 2000 سلسلة لـ 100 رمية لحجر النرد نتجت 2000 قيمة لـ d^2 . قمنا بتلخيص على مخطط بالعلب توزيع قيم d^2 1000



- هل يمكن التأكيد بمجازفة بالخطأ مقدارها 10%

أن حجر النرد غير مزيف ؟

28 مع ماندل

نظرية ماندل تنص على أن التزاوج بين بذور بزلأ

صفراء ملساء و بذور بزلأ خضراء مجعدة ينتج أربعة

أصناف بالاحتمالات $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{9}{16}$

لإعتماد هذه النتائج أجرى ماندل 315 ، 101 ، 108 ، 32

تجربة على الأصناف على الترتيب .

(1) أحسب قيمة d^2 . هل النتيجة مقنعة ؟

(2) إذا علمت أن العشري الأول هو 0.584

- فسر لماذا يجب التعامل مع عينة عددها أكبر من الذي استعمله ماندل .

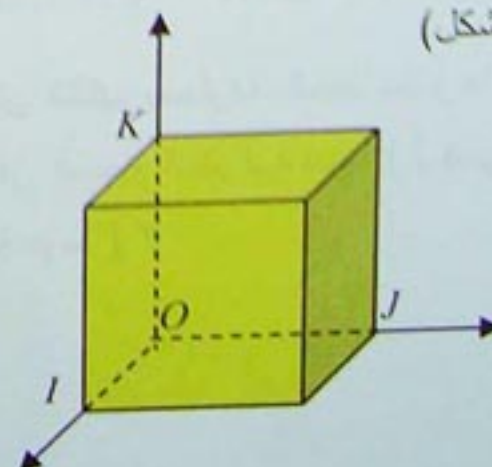
29 مع المكعب: نقبل التعميم التالي :

"الاختيار العشوائي لثلاث أعداد حقيقية x, y, z من

المجال $[0; 1]$ مستقلة عن بعضها البعض دوماً ، يمكن

محاكاته باختيار عشوائي لنقطة $M(x; y; z)$ من

المكعب (أنظر الشكل)



و هذا يعني أن احتمال جزء منتظم A محتوي في المكعب

هو حجم A

نفرض الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس

. $(O; I; J; K)$

(1) إنشاء مثلث :

نختار عشوائيا ثلاث أعداد حقيقية x, y, z مستقلة عن

بعضها البعض من المجال $[0; 1]$

- ما هو احتمال إمكانية إنشاء مثلث أطوال أظلاعه

x, y, z ؟

(2) مجموع ثلاث أعداد :

- الإنشاء الهندسي :

ليكن t عدد حقيقي و A, B, C النقط المعرفة

كمايلي :

$C(0; 0; t), B(0; t; 0), A(t; 0; 0)$

(E) الجزء من المكعب المحتوي في نصف الفضاء

المعرف بـ $x + y + z \leq t$ و V هو حجم (E)

(a) أنجز المنظور المتساوي القياس مقطع المستوي

$x + y + z = t$ على المكعب مع توضيح الحالات

$t \in [0; 1], t \in [1; 2], t \in [2; 3]$

(b) استنتج أنه من أجل :

$$t \in [0; 1] \quad V = \frac{1}{6}t^3$$

$$t \in [1; 2] \quad V = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}(t-1)^3$$

$$t \in [2; 3] \quad V = 1 - \frac{1}{6}(3-t)^3$$

(3) نأخذ عشوائيا ثلاث أعداد حقيقية مستقلة عن بعضها

البعض من المجال $[0; 1]$.

حدد و مثل بيانيا كثافة المتغير العشوائي S الذي يساوي

مجموع الأعداد الثلاثة

30 القطع النقدية المزيفة بقيمة 100DA

يملك أحمد 5 قطع نقدية من نوع 100 DA . خطرت له

فكرة " التحقق من مصداقية القطع " فهتدى الى فكرة رائعة

. قام برمي كل قطعة نقدية 100 مرة وسجل النتائج فكان

الجدول التالي:

رقم القطعة	1	2	3	4	5
مرات ظهور الظهر	37	54	41	39	58
مرات ظهور الوجه	63	46	59	61	42

(1) باعتبار مستوى الثقة 90 % ، ماهي القطعة التي سيعتبرها أحمد مزيفة ؟

(2) نفس السؤال السابق من أجل مستوى ثقة 95 % ؟

(3) نفس السؤال السابق من أجل مستوى ثقة 99 % ؟

المحاكاة : نجري بالحاسوب 1000 عملية بـ 100 رقم محصور بين 1 و 5 ، نعطى 1000 قيمة لـ d^2 .

العشري التاسع للمحاكاة هو 0,0154

31 في شركة متخصصة في إنتاج الثلجات، أثبت

مراقب نوعية أن الثلجة يمكن أن تحوي عيبين : عيب

التلحيم باحتمال مقداره 0,03 و عيب إلكتروني باحتمال

0,02

المراقبة أثبتت أيضا أن العيبين مستقلان .

نقول عن ثلجة أنها غير صالحة إذا وُجد فيها أحد العيبين.

(1) برهن أن احتمال أن تكون ثلجة ما غير صالحة هو

0,0494 .

(2) عرضت الشركة في سوق ما 800 ثلجة . نعتبر X

المتغير العشوائي الذي يرفق الثلجات المعروضة بعدد

الثلجات غير الصالحة .

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

- أحسب أمله الرياضي و حدد إشارته .

(3) تعطى النتائج مدورة الى 10^{-3}

(أ) اشترى أحد التجار 25 ثلجة من الشركة .

- أحسب احتمال وجود ثلجتين غير صالحتين ضمن

الثلجات المشتراة .

(ب) تاجر آخر يريد شراء عدد من الثلجات شريطة أن

يبقى احتمال حصوله على ثلجة غير صالحة على الأقل ،

أقل من 50 % . أحسب أكبر عدد من الثلجات بإمكان هذا

التاجر أي يشتريها .

(4) المتغير العشوائي الذي يرفق كل ثلجة من هذه الشركة

بمدة صلاحيتها (عدد أيام اشتغالها دون عطل) يتبع قانونا

أسيا وسيطه 0,0007 ، أي دالة كثافة الاحتمال f المعرفة

على المجال $[0; +\infty[$ بالعلاقة

$$f(x) = 0,0007 e^{-0,0007x}$$

- أحسب احتمال أن تكون مدة صلاحية ثلجة ما تتراوح

بين 700 يوم و 1000 يوم .

ب- أحسب $p(T=202)$. (يمكنك ملاحظة أن المحاولة

التاسعة عشر كانت تعادلا)

ج- من أجل كل عدد طبيعي k محصور بين 1 و

19. فسر الحادثة " $T = 2k$ " بدلالة A_k و B_k و استنتج

$$p(T=2k)$$

د- أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي T و انحرافه

المعياري .

32 يحتوي صندوق على قريصات خضراء و قريصات

بيضاء و أخرى حمراء (لا نمير بينها باللمس)

10 % من القريصات خضراء و عدد القريصات البيضاء

3 مرات عدد القريصات الخضراء .

يسحب لاعب قريصة عشوائية ، إذا كانت حمراء يأخذ ربحا

قاعديا ، إذا كانت بيضاء يأخذ مربع الربح القاعدي و إذا

كانت خضراء يخسر مكعب الربح القاعدي .

(1) نفرض أن الربح القاعدي هو 20 دينارا

(a) أكتب قانون الاحتمال للنتائج الممكنة .

(b) أحسب الربح المتوسط المأمول بعد عدد كبير من

السحبات .

(2) نريد تعيين g_0 قيمة الربح القاعدي حتى يكون أمل

الربح أكبر ما يمكن .

تعطى النتيجة بالدينار

ليكن X الربح القاعدي بالدينار .

(a) بين أن المسألة تنول الى دراسة النهايات الدية

للدالة f على المجال $[0; +\infty[$ حيث

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$$

(b) أدرس اتجاه تغيرات f على المجال $[0; +\infty[$ ،

استنتج حلا للمسألة السابقة .

اختيار من متعدد

33 الجزء الأول :

تستعمل شركة بنكين للمعطيات (B1) و (B2) .

• (B1) يحوي 6000 عنوانا (120 خاطئ و 5880

صحيح)

• (B2) يحوي 4000 عنوانا (200 خاطئ و 2800

صحيح)

(1) نأخذ عشوائيا 10 عناوين (واحد تلو الآخر و بالإرجاع)

من (B1) .

احتمال أن تكون 3 عناوين خاطئة هو :

$$\frac{C_{5880}^7 + C_{120}^3}{C_{6000}^{10}} \quad (a)$$

$$\frac{3}{120} \quad (b)$$

$$C_{10}^3 \times (C_{6000}^{120})^3 \times (C_{6000}^{5880})^7 \quad (d)$$

$$C_{10}^3 \times (C_{120}^3)^3 \times (C_{5880}^7)^7 \quad (e)$$

(2) من بين 10.000 عنوان نختار واحدا عشوائيا ، علما أن

العنوان المختار خاطئ ، احتمال أن يكون تم اختياره من

(B1) هو :

$$0,98 \quad (a)$$

$$\frac{0,4 \times 0,95}{0,6 \times 0,98 + 0,6 \times 0,02} \quad (b)$$

$$0,6 \times 0,98 \quad (c)$$

$$\frac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95} \quad (d)$$

34 الجزء الثاني :

مدة صلاحية آلة (بالساعات) () الى أن يظهر

أول عطل بها (تتبع قانون أسّي P معرف على $[0; +\infty[$

بوسيط 0,0005 .

احتمال أن تتعطل الآلة قبل الزمن t هو :

$$p([0; +\infty[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

(1) احتمال أن تكون مدة صلاح آلة أكبر من

2500 ساعة هو :

$$e^{-\frac{2500}{2000}} \quad (a)$$

$$e^{\frac{5}{4}} \quad (b)$$

$$1 - e^{-\frac{2500}{2000}} \quad (c)$$

$$e^{-\frac{2000}{2500}} \quad (d)$$

(2) مدة الصلاحية المتوسطة معطاة بـ

$$E = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

مدة الصلاحية المتوسطة (بالساعات) هي :

$$3500 \quad (a)$$

$$2000 \quad (b)$$

$$2531,24 \quad (c)$$

$$3000 \quad (d)$$

صحيح أم خاطئ

35 إذا أخذنا عشوائيا عددا حقيقيا من المجال $[0; 1]$

فاحتمال أن يكون مربعه أصغر من 0,4 أكبر من احتمال

أن يكون مربعه أكبر من 0,7

36 نسحب من صندوق يضم n كرة مرقمة من 1 إلى n

كرتين على التوالي مع الإرجاع .

احتمال أن يكون رقم الكرة الأولى أكبر من رقم الكرة

الثانية يساوي احتمال أن يكون رقم الكرة الثانية أكبر من

رقم الكرة الأولى

37 نأخذ عشوائيا و بكيفيتين مستقلتين عن بعضهما

البعض عددين حقيقيين من المجال $[0; 1]$ و نرمز بـ

T للعدد الأكبر .

كثافة T هي $f(t) = 2t$

38 في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر (C) دائرة مركزها O و نصف قطرها

r مأخوذ عشوائيا من المجال $[0; 1]$. احتمال تقاطع الدائرة

(C) مع المستقيم $x + y = 1$ (D) أكبر من 0,5

استعمال بعض الوظائف على الحاسبة البيانية TI 83 plus

الدوال

WINDOW
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=-X^3+2X^2+1
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=

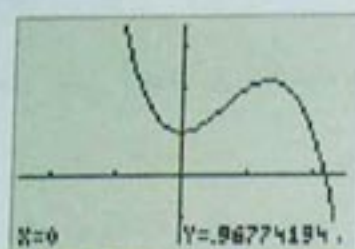
➤ **حجز الدالة** : مثلاً ، $f : x \rightarrow -x^3 + 2x^2 + 1$

أضغظ اللمسة **Y=** نحصل على الشاشة المقابلة

ثم نحجز العبارة $-x^3 + 2x^2 + 1$

مع الملاحظة أن إشارة الناقص الأولى تستعمل اللمسة **(-)**

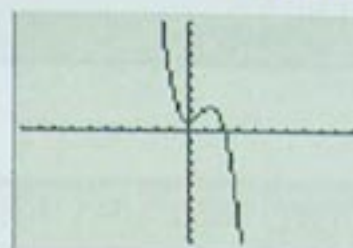
تسوية مجال الرسم باستعمال **WINDOW** ونعيّن المجال $[-10;10]$.



Zoom In



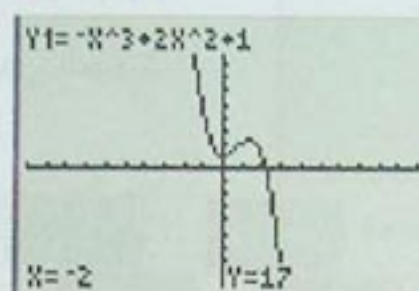
Zoom Out



اللمسة **GRAPH** للتمثيل البياني

اللمسة **ZOOM** مع Zoom In

للتكبير و Zoom Out للتصغير



➤ **لحساب صورة** $x = -2$ نستعمل اللمسة

ثم نضغظ على اللمستين **(-)** و **2** ثم نوافق

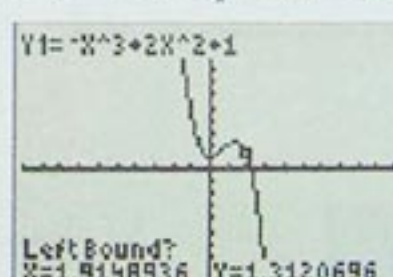
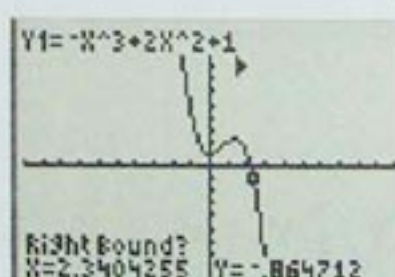
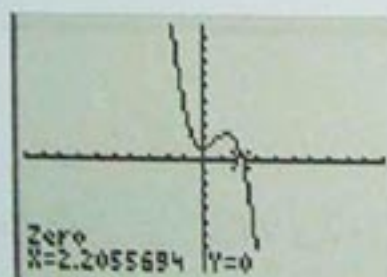
باللمسة **ENTER** نحصل على $y = 17$.

➤ **لقراءة الفاصلة** x_0 لنقطة تقاطع المنحني مع حامل محور الفواصل

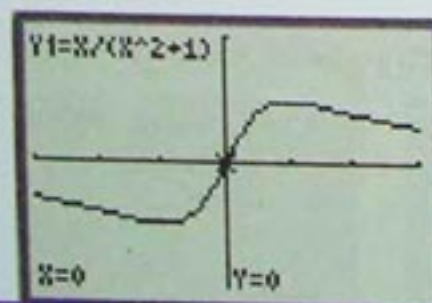
نستعمل **2nd** **TRACE** ثم نعيّن الوظيفة zero : 2 في الشاشة الأولى ونوافق باللمسة **ENTER**

على الشاشة الثانية نختار نقطة فاصلتها أصغر من x_0 ونوافق ثم على الشاشة الثالثة نختار نقطة فاصلتها أكبر من x_0

ونوافق ثم نوافق مرة أخرى نحصل النتيجة في الشاشة الرابعة .



2nd TRACE
1:value
2:zero
3:minimum
4:maximum
5:intersect
6:dy/dx
7:∫f(x)dx



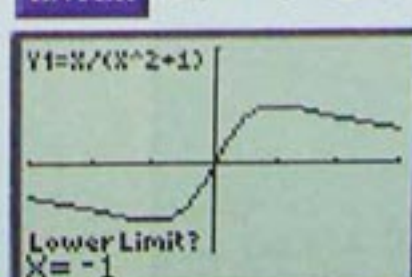
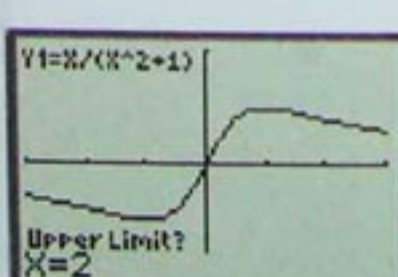
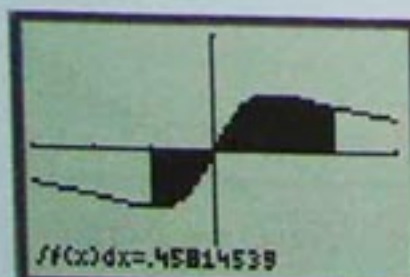
WINDOW
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=1
Yscl=1
Xres=1

➤ **حساب التكامل** : مثلاً $\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2+1} dx$

نحجز العبارة $\frac{x}{x^2+1}$

نحصل على الشاشة الأولى أدناه ثم نعيّن الوظيفة السابعة 7 : $\int f(x) dx$ ونوافق باللمسة **ENTER**

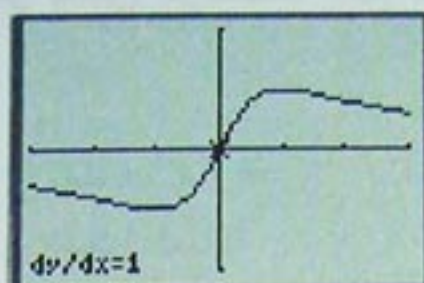
نسجل **1- ENTER** ثم نسجل **2** ونوافق مرة أخرى **ENTER**



2nd TRACE
1:value
2:zero
3:minimum
4:maximum
5:intersect
6:dy/dx
7:∫f(x)dx

➤ حساب العدد المشتق $f'(x_0)$

نفس الاستعمال السابق ونعين الوظيفة السادسة 6: dy/dx نوافق ثم نسجل 0 قيمة لـ x_0 ثم نوافق نحصل على النتيجة في أسفل الشاشة .



➤ رسم المماس لمنحن عند نقطة منه

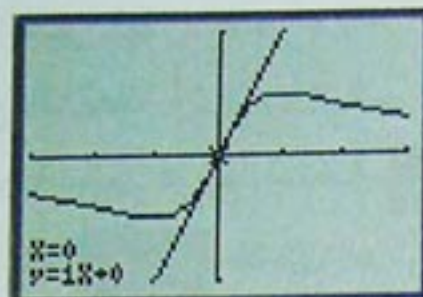
DRAW

PRGM

2nd

بعد حجز العبارة $f(x)$ نستعمل للمستين

نعين في القائمة DRAW الوظيفة الخامسة 5: Tangent(ثم نوافق ونحجز فاصلة نقطة التماس مثلا 0 ثم نوافق ، نحصل على المستقيم وكذلك معادلته في أسفل الشاشة .



```

1:ClrDraw
2:Line(
3:Horizontal
4:Vertical
5:Tangent(
6:DrawF
7:Shade(
    
```

➤ حل معادلة

مثلا حل المعادلة $\ln x - x + 2 = 0$

نستعمل اللسة MATH ونحدد في القائمة MATH

الوظيفة العاشرة 0: Solver... نوافق ونحجز العبارة

$\ln x - x + 2$ ثم نوافق

EQUATION SOLVER
eqn: 0=ln(X)-X+2

```

NUM CPX PRB
4:J(
5:XJ
6:fMin(
7:fMax(
8:nDeriv(
9:fnInt(
0:Solver...
    
```

نحجز 0 في X ثم للمستين على التوالي ALPHA و ENTER نحصل على الحل الأول 0,15859...

ثم نحجز 10 في X ثم للمستين على التوالي ALPHA و ENTER نحصل على الحل الثاني 3,14619...

```

ln(X)-X+2=0
X=3.1461932206...
bound={-1E99,1...
left-rt=0
    
```

```

ln(X)-X+2=0
X=.15859433956...
bound={-1E99,1...
left-rt=0
    
```

```

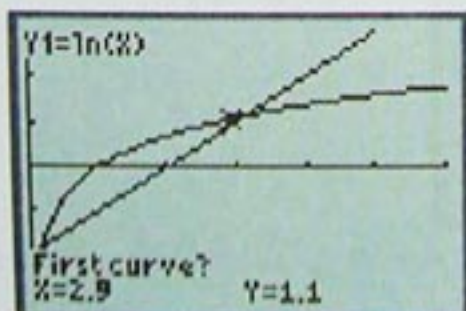
ln(X)-X+2=0
X=0
bound={-1E99,1...
    
```

➤ حل معادلة بيانيا

نحجز العبارتين $\ln x$ و $x - 2$ على الترتيب في Y_1 و Y_2 ، نضغط على 2nd TRACE ونعين الوظيفة الخامسة

5: intersect نوافق نعين نقطة قبل التقاطع نوافق ثلاث مرات نحصل على الفاصلة $x = 3,14619...$ والترتيب

$y = 1,14619...$ لنقطة التقاطع وبففس الطريقة نعين النقطة الثانية .

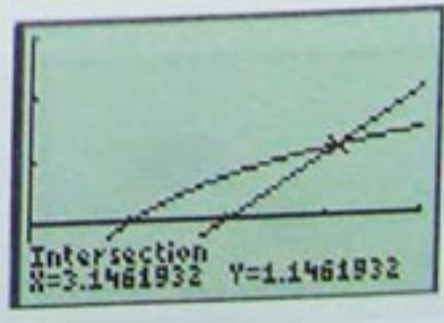
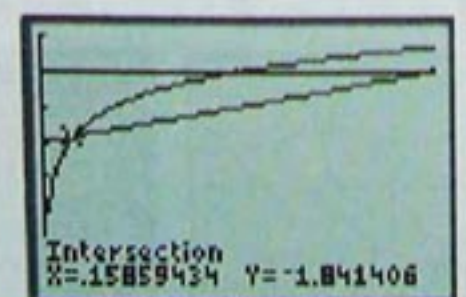


```

CALCULATE
1:value
2:zero
3:minimum
4:maximum
5:intersect
6:dy/dx
7:∫f(x)dx
    
```

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=ln(X)
Y2=X-2
Z=
C=
D=
E=
F=
G=
H=
    
```



الدوال

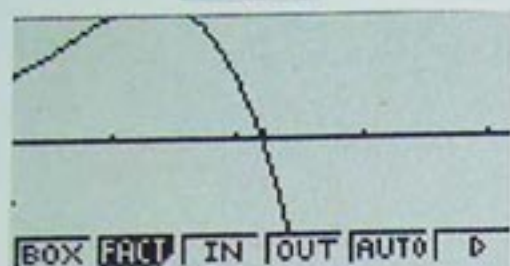
نحرر الدالة باستعمال (MENU) (5) ، تسوية مجال الرسم (F3) (SHIFT) ونرسم المنحني على $[-10;10]$



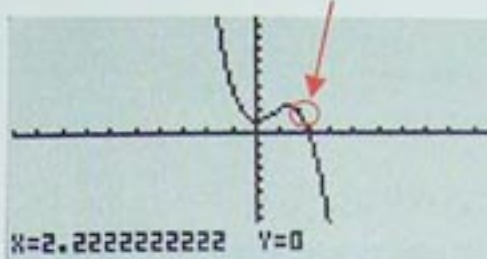
(F6) (DRAW) (EXIT)

لتكبير وتصغير ناحية نقطة من المنحني :

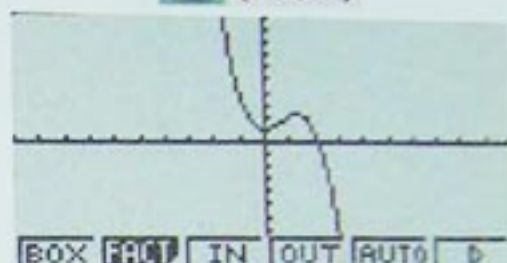
(F3) (IN)



تعيين ناحية التكبير

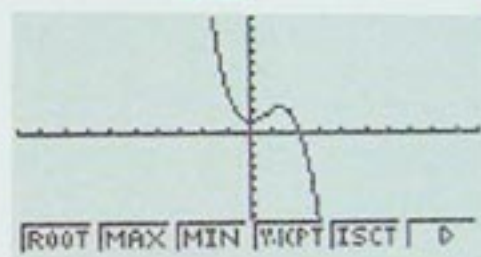
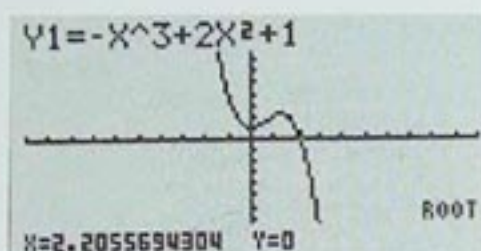


(F2) (Zoom)



قراءة لفاصلة x_0 نقطة تقاطع المنحني مع حامل محور الفواصل

(F5) (SHIFT) (F1) (G-Solv) (ROOT) ، سنحصل على الشاشة الموالية



الإحصاء

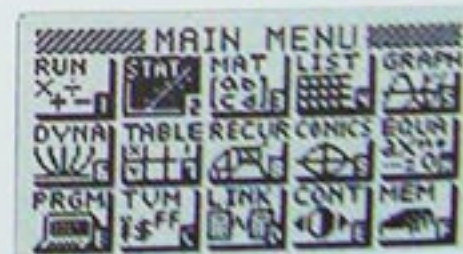
نعتبر السلسلة الإحصائية التالية :

الكتلة (g)	320	330	340	350	360	370	380
التكرار	2	6	19	24	22	19	8

لتحرير قائمة إحصائية نتبع الخطوات التالية :

أملئ List1 بالكتل 320 (EXIT) 330 (EXIT) ...
ثم أملئ List2 بالتكرارات 2 (EXIT) 6 (EXIT) ...

List 1	List 2	List 3	List 4
1	320	2	
2	330	6	
3	340	19	
4	350	24	
5	360	22	

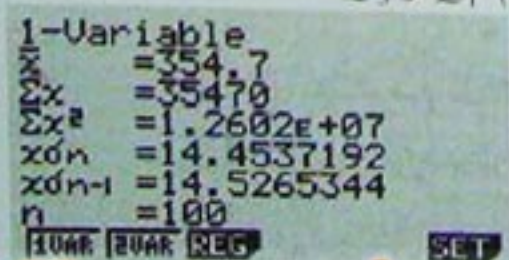


لحساب المؤشرات :

(IVAR) (IF) (EXIT) ثم نقرأ

$\bar{x}$ والانحراف المعياري $s = x \sigma n$

ثم Q_1 و Q_3 ...



(SET) (IF) (List1) (EXIT) (List2) (2F) (EXIT)



(CALC) (2F)

List 1	List 2	List 3	List 4
1	320	2	
2	330	6	
3	340	19	
4	350	24	
5	360	22	

لتحميل الكتب المدرسية
الابتدائي-المتوسط-الثانوي
إضغط هنا

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

